Lo "0" è un ostacolo?

Di Leonardo M.V., Marino T., Spagnolo F.[1]

Sommario

Per stabilire se lo “0” é un ostacolo epistemologico consideriamo il modello teorico sperimentale di Brousseau-Spagnolo. In questo lavoro si analizzano le rappresentazioni epistemologiche ed alcune tracce storiche dello “0” . Viene anche presentato uno studio sperimentale. Possiamo affermare che lo “0” é un ostacolo epistemologico e che il suo superamento può avvenire se diventa un elemento del proprio “senso comune”, per il soggetto apprendente.

Summary

To decide whether the “zero” is an epistemological obstacle we consider the theoretic-experimental model of Brousseau-Spagnolo. In this paper we analyse the epistemological representations of some historical traces of “zero”. We present the experimental study about it, too. We can assert that the “zero” is an epistemological obstacle and that the over-training of it may happen whether it becomes an element of the “common sense” of the learning subject.

Résume

Pour etablir si le “zero” c’est un obstacle épistemologique nous considerons le modèle théorique-experimental de Brousseau-Spagnolo. Dans ce travail on analise les répresentations épistemologiques et quelques plans hisoriques du “zero”. On presente aussi un étude experimental. Nous pouvons affirmer que le “zero” c’est un obstacle épistemologique et que le franchissement peut arriver s’il devient un élement de son “sense commune”, pour le sujet apprennent.

[1]- Componenti del G.R.I.M.(Gruppo di Ricerca sull’insegnamento delle Matematiche), Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Palermo. Lavoro eseguito nell’ambito del MURST.

Lo "0" è un ostacolo?

Di Leonardo M.V., Marino T., Spagnolo F.

1.0 Introduzione

Il paradigma di riferimento di questo lavoro è quello della *Ricerca in Didattica* [2], [33].
Una ricerca in didattica delle Matematiche dovrebbe preoccuparsi di indagare:

- le rappresentazioni epistemologiche riguardanti il contenuto matematico;
- le rappresentazioni storico-epistemologiche riguardanti il contenuto matematico;
- lo studio dei comportamenti attesi da parte degli allievi rispetto alle attività sperimentali proposte.

Nel passaggio dal pensiero aritmetico a quello algebrico un ruolo importante è svolto dall'approfondimento dei cosiddetti ostacoli epistemologici.

Consapevoli che l'individuazione degli ostacoli costituisce un campo di ricerca molto vasto e necessita di diverse conferme, fornite da indagini storico-epistemologiche e sperimentali, dalla messa a punto di situazioni didattiche che superino gli ostacoli stessi, in questa nota ci siamo limitati a considerare l'ostacolo relativo allo *"zero"* ed a tentare di individuarne alcune possibili cause.

Questo lavoro nasce da esperienze diverse dei singoli autori; in particolare quelle ([5], [6], [16], [17], [18], [32], [33]) e ai contenuti del Seminario del GRIM del Marzo 1996 sullo *"zero"* come ostacolo.

Abbiamo voluto aggiungere in *Appendice 1* alcuni elenchi di errori apparsi sulla Rivista "Il Pitagora" in quanto i loro contenuti sono stati punto di partenza per la problematica esposta in questo lavoro ed inoltre perché evidenziano le concezioni degli allievi e degli insegnanti, contestualizzate al periodo storico fine 800-inizio 900, risultate utili per meglio comprendere le concezioni odierne.

Tali errori provengono da conoscenze fatte altrimenti, per altri scopi ed adattate a problemi differenti, in tal senso sono da considerarsi come dice Brousseau ″ostacoli″ per l'apprendimento della matematica.

Sicuramente tali ostacoli si possono definire didattici, nel senso che dipendono, in generale, dalla trasposizione didattica, o di origine didattica, nel senso che sono legati al momento della comunicazione e possono a volte coincidere con gli ostacoli epistemologici, che hanno un ruolo costitutivo nella conoscenza.

Questo lavoro riguarda alcune considerazioni sulle rappresentazioni epistemologiche, su alcune tracce storico-epistemologiche ed una prima fase dell'attività sperimentale relativa alla messa a punto di un pre-test (v. *Appendice 2*)

1.1 Perché lo "zero"? Esiste una questione-zero?

Lo "zero" è *un segno/simbolo* interessantissimo e singolare che *provoca* il pensiero, *produce* pensiero paradossale, *facendo riflettere* su diversi campi *fornendo risposte ambigue.* Esso è intimamente connesso all'idea *di "Niente" , "Nulla", "Numero" "Mondi virtuali", "Variabile", "Grandezza"...*

L'introduzione dello *"zero"* nella pratica dell'aritmetica, come quella del *"punto di fuga"* nell'arte della prospettiva e quella della *"moneta immaginaria"* nello scambio economico, può essere vista semioticamente equivalente alla stessa configurazione significante; infatti, il primo è un segno tra i segni di numero, il secondo è un'immagine tra le immagini e il terzo è una moneta tra le monete *capaci di produrre un cambiamento di livello* nel processo d'apprendimento e di conoscenza *trasformando* ciò che, in un livello inferiore è puramente o*perativo* in qualcosa di *strutturale,* in oggetto ad un livello superiore.

Un'idea della complessità dello "zero" è data dal fatto che, come segno matematico, entrò con difficoltà nella cultura europea; infatti, essendo vicino al "niente" divenne arduo comprenderlo *come un segno sui segni, cioè un metasegno,* il cui significato è quello *di indicare*, per via di una sintassi che con esso arriva, l'assenza di certi altri segni. D'altra parte esso è un *nome* che indica anche *un numero*. Proprio questo doppio aspetto ha permesso allo zero di servire come *luogo d'ambiguità fra un carattere vuoto e un carattere per il vuoto.*

Lo zero rappresenta la non presenza dei numeri 1,2, ...,9 e contemporaneamente produce l'intera progressione potenzialmente infinita degli interi.

Per Rotman [30] la comprensione del ruolo dello zero produce una chiusura semiotica che è rappresentabile dalla variabile algebrica nel XVI secolo, creatasi intorno alla nozione di *non presenza* significata di certi segni.

Che cosa si può dire con l'aiuto del segno *"zero"* che non si poteva dire senza di esso?

1.2 La chiusura semiotica dello zero

Alla fine del XVI secolo S. Stevin (1548-1620), matematico olandese, nel suo trattato "The Dime", perorava l'estensione del sistema di numerazione indiana dai decimali finiti a infiniti esprimendo *grande meraviglia per il potere creativo dello zero,* per il modo in cui esso fabbricava un'infinità di segni di numero.

Egli rigettava l'idea classica di numero cioè quella che esso deve indicare sempre cose definite; diversamente da,(come riporta per esempio Klein [12]): *"Platone"* che parla di numeri che hanno *corpi visibili e tangibili..... sicchè, contando pecore, cavalli* ... questi processi danno numeri di *pecore* e di *cavalli* e da *Aristotele* che parla di *astrazioni* ma sempre legate a particolari collezioni concrete. In ogni caso per essi il numero è un assemblaggio d'unità.

Per Stevin l'unità era un numero come ogni altro; l'*arché* del numero non era l'unità ma lo zero; lo zero è l'origine propria del numero: così come per la geometria il punto genera la retta così lo zero dà origine ai numeri.

Stevin dà un'interpretazione semiotica del numero trasferendo la mancanza di referenzialità dello zero, cioè la sua mancanza di *contenuto positivo,* a *tutti* i numeri

Per Stevin i numeri sono segni che *prendono significato in relazione ad altri segni*, e la *creazione di un sistema di significanti infinitamente lunghi* fu il primo passo per la numeralizzazione del continuo reale unidimensionale ed ebbe una grande portata per la matematica del XVII secolo e per quella successiva per arrivare alle idee di numero reale date da Cantor e da Dedekind.

Stevin "usava un'algebra "che usava una sommazione infinita, per esempio 0,3333...significava 3(0)+3(1/10)+3(1/100)+3(1/1000) *ad infinitum*, usando un linguaggio dove contemporaneamente sussistevano numeri determinati, possibilmente sconosciuti, ma fissi (costanti), e delle entità non numeriche indeterminate ("variabili")[2].

Oggi noi consideriamo *la variabile come un segno*, il cui significato è in relazione ad altri segni necessariamente assenti, all'interno di un'espressione algebrica, segni che ne costituiscono il *dominio*, e *come metasegno,* in quanto indica la presenza virtuale, potenziale, possibile ma non effettiva di un segno.

L'idea matematica essenziale della variabile, dovuta anche a F. Viète, 1540-1603, (contemporaneo di Stevin) è che: la variabile è come un numero *indeterminato con cui si può calcolare come se fosse determinato.*

---

[2] C. Singer in [31], pag. 206, attribuisce a S. Stevin il merito di avere introdotto il sistema decimale per la rappresentazione delle frazioni

1.3 Quale é la connessione fra lo zero e una variabile come metasegno?

Lo zero funziona dualmente : si muove tra il suo ruolo interno, come numero fra i numeri e il suo ruolo esterno, come metasegno che dà inizio all'attività del soggetto che conta.

Lo stesso avviene per la variabile algebrica, *internamente è manipolabile come oggetto*, segno fra i segni in formule, è trattato come se fosse segno di numeri secondo una sintassi comune (addizionato, moltiplicato,..) *esternamente indica la presenza possibile*, *ma non effettiva di segni di numero.*

Questa dualità è mediata da un nuovo soggetto matematico, *il soggetto algebrico* che ha la capacità di significare l'assenza del soggetto che conta, lo spostamento di una presenza *effettiva* ad una *virtuale*.

La distinzione fra l'algebra e l'aritmetica elementare, sta proprio nella distinzione fra il soggetto che conta e il soggetto algebrico che esegue i calcoli restando autonomo e aritmeticamente conscio di sé.

La variabile è un segno per i segni che possono essere prodotti da chi conta..

Lo *zero* pur essendo un segno connesso con l'idea di *niente*, di *vuoto*, del posto in cui nessuna *cosa è*, rappresenta: l'origine del conteggio, la traccia di *chi conta* in altre parole di colui che produce la sequenza dei numeri.

Il soggetto algebrico esegue un'operazione di chiusura sull'infinita proliferazione dei segni di numero, che vengono in essere con lo *zero*.

1.4 Lo "zero" è un'ostacolo epistemologico?

Sicuramente possiamo affermare che lo *"zero"* è un ostacolo epistemologico perché

1. è un *catalizzatore* d'errori, in pratica un test molto efficace per valutare effettivamente quanta e quale conoscenza (aritmetica-algebrica) sia stata trasposta in sapere da parte dell'allievo;
2. è *storico* nel senso che la diffusione dello *"zero"* nella cultura occidentale avviene soltanto nel 1202 con i "Liber Abbaci" di Leonardo Pisano e viene usato essenzialmente come cifra, mentre per considerarlo numero a tutti gli effetti bisogna aspettare la fine del 1500 ; è radicata la convinzione secondo la quale i Greci e il mondo antico e classico in genere non conoscessero lo *"zero"* (Aperta è comunque la discussione)[3]
3. come *"errore"* permane e perdura nel tempo

Anche per Brousseau lo *"zero"* è un ostacolo epistemologico in quanto:

1. non risiede nella "formulazione" delle conoscenze istituzionalizzate ma nella rappresentazione che il soggetto *veicola* per assicurare, il funzionamento e la comprensione della conoscenza;
2. è una *conoscenza* che s'acquisisce quando si prende coscienza del suo ruolo nella messa a punto del sapere e nel passaggio dall'aritmetica all'algebra

Lo "zero" è presente nell'aritmetica e si può probabilmente affermare che non costituisce un problema sia per le operazioni d'addizione e sottrazione; che rientrano nel "senso comune", sia per quella di moltiplicazione vista come addizione ripetuta: infatti, l'eguaglianza $n{\cdot}0=0{\cdot}n=0$ viene facilmente accettata passando al linguaggio comune *niente più niente uguale niente;* mentre per l'operazione di divisione, *il dividere per zero* non viene presentato agli allievi in quanto non ha *senso.*

Gli alunni della scuola elementare prendono confidenza con la cifra zero e riescono a raggiungere una buona manipolazione grazie all'abaco, e alla presentazione decimale o polinomiale di un numero, ma generalmente non viene loro messa in evidenza la peculiarità dello *"zero"* rispetto agli altri numeri ed in seguito, quando s'introduce la divisione, *è implicito* che il divisore sia maggiore di zero.

Si crea così negli allievi un sapere in cui, lo *"zero"* non risulta essere un problema; infatti, esso viene *da loro* rappresentato come il nulla, il niente, il vuoto in accordo con il loro *senso comune*, mentre

---

[3]Tra gli altri [30] e [34]

si tratta di un'immagine, un segno al di fuori del linguaggio *naturale*.

Lo zero *viene recepito, dagli allievi della scuola elementare*, essenzialmente come *processo operativo* e *non strutturalmente* cioè come oggetto.

In algebra, vista come generalizzazione dell'aritmetica[4], quando viene usato senza considerare la sua peculiarità, lo *zero diventa un problema* poiché in questo nuovo contesto esso è necessario, *è un mattone costitutivo* per la costruzione sintattica della stessa, assume un ruolo fondamentale nelle strutture algebriche, *un significato pregnante* nella discussione e nella soluzione delle equazioni, *perde il contatto* con la realtà e l'intreccio dei due linguaggi quello naturale e quello formale, diventa causa di tensione e fonte di difficoltà .

Lo *"zero"* che produce, generalmente, risposte corrette nel contesto dell'aritmetica, fornisce invece spesso risposte false nel contesto algebrico[5].

Il passaggio dall'aritmetica all'algebra è stato possibile, solo quando lo "zero" è stato recepito culturalmente nella sua doppia valenza di segno e di metasegno.

Per spiegare che cosa significhi lo zero come segno è necessario dover significare altri segni, esso indica l'assenza di "cose" e l'assenza di "segni"

Pertanto lo "zero" ha un diritto privilegiato all'attenzione

2.1 Approcci al concetto di numero nella scuola elementare

Analizzando gli approcci al numero nella scuola elementare, si nota che essi cercano *di far recuperare le esperienze concrete fatte dai bambini nel loro mondo*, tentando di avere un carattere formativo e *cercando di valorizzare il pensiero produttivo di nuove scoperte, per creare non tanto l'abilità del "fare" quanto formare l'abilità di "arrivare a fare, capendo ciò che si fa"*.

L'approccio iniziale al concetto di numero naturalmente deve essere in armonia con il modello che il bambino ha già dentro di sé, non deve usare un linguaggio artificiale ma deve seguire piuttosto i processi naturali e stimolare le capacità logico-cognitive del bambino per non ricadere nel *massimalismo strutturale* in auge negli anni 1960-70, caratterizzato da un certo tipo di formalismo e dall'utilizzazione prematura del simbolismo, oppure nel *minimalismo programmatico* del periodo precedente, che pur conservando all'aritmetica un posto principale, a volte esclusivo, nei programmi della scuola elementare elaborati dal 1860 in poi, la considerava soltanto *pratica*, cioè avente come unico obiettivo l'apprendimento delle quattro operazioni per la risoluzione di problemi *pratici* [8],[14],[26].

L'idea del numero naturale è complessa e richiede pertanto "un approccio che si avvale di diversi punti di vista (ordinalità, cardinalità, misura, insiemistica, ricorsività etc...) " [3] e viene acquisita dopo lunga interiorizzazione da parte del bambino.

D'altra parte il concetto di numero è un concetto astratto cui si è pervenuto attraverso una evoluzione del pensiero logico avvenuto in varie tappe [1],[7],[10],[20].

L'approccio al numero è lo sviluppo di un itinerario didattico che utilizza una definizione di numero secondo una certa teoria matematica; per Pellerey [27] gli approcci più rilevanti per la costruzione del concetto di numero sono:

1. Approccio insiemistico
2. Approccio ordinale
3. Approccio ricorsivo
4. Approccio basato sulla misura

In molti progetti didattici per il I primo ciclo delle scuole elementari, c'è da notare però un certo *pluralismo* d'approcci [11], in generale essi recuperano i diversi aspetti del numero, avvicinandosi ad esso da diversi punti di vista, recuperando il patrimonio extra-scolastico del bambino, che già di per sé ha trovato a livello *inconscio*, una strategia che seppur non sistematica, riesce funzionale alle sue esigenze.

---

[4]P. Boero: "l'algebra si organizza a partire dai segni relativi alle quattro operazioni aritmetiche ed al segno di uguale con le relative regole d'uso" in L'Insegnamento della Mat. e delle scienze integrate, vol.15, n.10

[5] In [19] Mariotti evidenzia la necessità di far ripensare all'allievo il significato della divisione per zero.

L'approccio insiemistico, si basa sulla definizione di numero di Frege e Russell ed utilizza il linguaggio della *Teoria ingenua degli insiemi.*

In tale approccio si usano oggetti (palline, caramelle, materiale strutturato, etc...) che possono essere dati in mano ai bambini, i quali operano raggruppamenti e classificazioni, che li portano a considerare insiemi tra loro equipotenti ai quali vengono attribuiti dei simboli arbitrari prima e ben definiti poi: i numeri.

Il numero viene visto come la rappresentazione di una classe di insiemi equipotenti e non di questo o di quell'oggetto particolare, si recupera così l'aspetto cardinale.

Lo zero in tale approccio è rappresentato dalla classe degli *insiemi con nessun elemento*, la classe degli insiemi vuoti, lo *zero*, come numero non è "niente", "vuoto" ma *un concetto con una sua precisa determinazione.*

Per lo studente invece lo "zero" è intimamente connesso all'idea di niente, di vuoto, di *ciò che non è*, di *ciò che non c'è*, mentre per esempio 2 è connesso all'idea di *ciò che c'è,* di *ciò che è*: una coppia, un paio, un ambo , un duo; l'associazione all'insieme vuoto fa apparire il significato dello *"zero"* diverso da quello degli altri numeri. *"Lo zero è una quantità che scompare, che non c'è, lo zero è il segno dell'assenza di quantità"* [19].

Lo zero è così intimamente connesso all'idea di niente, di vuoto.

Nell'approccio insiemistico spesso viene messo in evidenza anche l'aspetto ordinale del numero, ogni numero occupa un suo ben preciso posto nella sequenza numerica, partendo da un elemento iniziale (zero o uno) si prosegue, dopo aver fatto una corrispondenza uno a uno, implementando gli insiemi con un elemento diverso, sviluppando così anche il *pensiero ricorsivo* (iterativo), basato sulla funzione che associa a un elemento il suo successivo.

Il pensiero ricorsivo si può fare acquisire anche sfruttando *sequenze naturali* che i bambini hanno già interiorizzato, come il ritmo del succedersi del giorno e della notte, delle stagioni o *esperienze personali*, come quelle del mangiare e del dormire, del battito cardiaco.

Il bambino costruisce nella sua mente *sequenze non numeriche* strettamente legate all'azione e *lo zero è vissuto coma assenza di qualcosa: di movimento, di suono e così via*.

L'approccio ricorsivo permette di costruire l'insieme dei naturali attraverso il *contare verbalmente* e si rifà, così come, l'approccio ordinale alle teorie assiomatiche dei numeri naturali.

Nell'approccio basato sulla misura, il numero naturale è *collegato* più che ad una quantità di oggetti di un insieme *alla quantità di unità di misura* che possono essere trovate misurando una certa grandezza.

Un tale approccio presenta alcune difficoltà, *i greci* pensavano al numero come misura di tutte le cose, erano portati cioè ad identificare *misurare* con *contare*, così come il bambino che cerca di capire ad esempio, quanti bicchieri si possono riempire con una bottiglia di acqua.

Il bambino non ha idea della necessità dell'invarianza del campione usato per la misura, per cui i calcoli possono risultare non corretti.

Misurare, infatti, è molto più complesso che contare, poiché occorre anzitutto individuare una proprietà rispetto alla quale confrontare gli oggetti (ad es. lunghezza, capacità, etc...), ricorrere quindi ad una misura *relativa* rispetto ad un *campione* per vedere quante volte essa è contenuta negli oggetti per passare così dalla misura al numero.

Nell'attività didattica per l'approccio tramite la misura si possono usare *regoli* o *numeri in colore* per visualizzare che l'unità è contenuta un numero di volte ben preciso in un altro numero.

In tale approccio lo zero non può essere preso in considerazione dato che non ha *senso* misurare quantità nulle o considerare misure *campioni* nulle.

In generale un'approccio geometrico non tiene in considerazione speciale le grandezze nulle che compaiono più o meno nascostamente nello studio della geometria[6]

[6]Riportiamo in *Appendice 5* una nota di C. Ciamberlini, [4] riguardante le grandezze nulle in geometria

3.1 *Una riflessione epistemologica sul ruolo dello "zero" negli assiomi di Peano, Padoa e Pieri.*

L'impostazione di G. Peano è tuttora largamente usata per l'introduzione dei numeri naturali nella formazione degli insegnanti.

In *"Arithmetices Principa nova methodo exposita"* [7] del 1889 G.Peano espone l'Aritmetica in forma di *sistema ipotetico-deduttivo*, assumendo quattro concetti primitivi (*numero, unità, successivo e uguale*) e nove assiomi (di cui quattro riguardanti l'eguaglianza).

Successivamente a partire dal 1891[8] e nelle cinque edizioni (ufficiali) del *"Formulario Mathematico"* (1895-1908) i concetti primitivi sono ridotti a tre (*numero, unità, successivo* e dal 1898[9] *numero, zero e successivo*) e gli assiomi a cinque (*vedi Appendice 3*).

In queste opere G.Peano adopera il segno N (a volte N_1) per indicare un numero intero positivo ed il segno N_0 per indicare un numero intero assoluto e dice *"non naturale"* il numero zero in *"Aritmetica Generale e Algebra"* [25]

I sistemi assiomatici di Peano sono sufficienti per l'aritmetica degli interi positivi o assoluti dato che gli assiomi sono tra loro indipendenti. A. Padoa [21] osservò però che, anche se l'insieme dei postulati di Peano è irriducibile, il sistema dei concetti primitivi è riducibile rispetto a quello dei postulati, poiché si può ricavare da essi la definizione del numero (0 o 1) che non è successivo di alcun altro.

Egli assume quindi come concetti primitivi soltanto *numero e successivo* e come proposizioni primitive le seguenti:

P_d1) Il *successivo* di un numero è un *numero*.
P_d2) Due *numeri* che abbiano lo stesso *successivo* sono uguali.
P_d3) Esiste almeno un *numero*, che non è *successivo* di alcun *numero*.
P_d4) Se una classe (di *numeri*) contiene un *numero* che non è *successivo* di alcun altro e se il *successivo* di ogni *numero* della classe appartiene alla classe, allora ogni *numero* appartiene alla classe. (*Principio di induzione completa*)

Padoa dimostra quindi che *vi è un solo numero* che non è successivo d'alcun altro, ossia il seguente:

Teorema (T_1)-*Se x e y sono due numeri tali che $x \neq suc\ z$ e $y \neq suc\ z$*[10]*, per qualsiasi numero z, allora $x=y$.*[11]

Definendo l'unità o lo zero come quell'unico *numero* che non è *successivo* d'alcun altro i sistemi assiomatici di Peano, rispettivamente per N, e per N_0 (*vedi Appendice 3*), sono equivalenti al sistema assiomatico di Padoa[12].

M. Pieri nel 1907 [28] propose una modifica al sistema assiomatico di Padoa per potere sostituire il principio di induzione completa con una *proposizione più semplice.*

Egli come Padoa assume come concetti primitivi *numero* e *susseguente* (successivo) e formula i seguenti postulati tra loro indipendenti:

P_i1) Esiste almeno un *numero*.
P_i2) Il *susseguente* di un *numero* è un *numero.*
P_i3) Due *numeri*, nessuno dei quali sia *susseguente* di un *numero*, sono sempre uguali tra loro.

---

[7] art.16,[22]
[8] art.37,[23]
[9] art.99,[24]
[10] leggasi successivo di z.
[11] Dim. Supponiamo che sia $x \neq y$ e denotiamo con I la classe di tutti i numeri diversi da y, quindi $x \in I$ e per ogni $t \in I$ suc $t \in I$, allora per P_d4) I contiene ogni numero e y non è un numero, ma ciò è assurdo.
[12] Si ha infatti che gli assiomi P2) e $P_0$2) coincidono con P_d1), P3) e $P_0$3) con P_d2), P5) e $P_0$5) con P_d4), mentre $P1) \wedge P4)$ e $P_01) \wedge P_04)$ implicano P_d3) e viceversa.

$P_i4)$ In qualsivoglia classe non illusoria di *numeri* esiste almeno un *numero*, che non è *susseguente* di alcun *numero* della classe. (*Principio del minimo*)

Si noti che il $P_i4)$ è comunemente detto *Principio del minimo* dato che lo stesso Pieri in [28],pag.450 così afferma relativamente allo stesso:
″….questo giudizio esistenziale è preferibile a δ [P_d4)] come più facile e piano: e non parlo dell'evidenza; perché si tratta insomma della comune notizia, che fra i numeri (interi, positivi o nulli) d'una classe effettivamente esistente ce ne dev'esser qualcuno che non sia maggiore di nessun altro.″

Il sistema assiomatico di Pieri è equivalente a quello di Padoa e quindi a quello di Peano (*v. Appendice 4*).

Tale equivalenza ha portato ad utilizzare, per introdurre i naturali, indifferentemente il sistema assiomatico di Peano o quello di Pieri ed alcune volte si utilizza il *Principio del minimo* al posto del *Principio di induzione completa*, anche se tra di essi non c'è una precisa corrispondenza, dato che il *Principio di induzione completa* è equivalente (*v. Appendice 4*) alle seguenti proposizioni:

a) Esiste un solo *numero* che non è *successivo* di alcun altro *numero*.

b) In qualsivoglia classe non illusoria di *numeri* esiste almeno un *numero* che non è *successivo* di alcun *numero* della classe. (*Principio del minimo*)

I sistemi assiomatici di G. Peano possiedono diversi *modelli*, cioè esistono diversi insiemi di oggetti nei quali si può dare un'interpretazione dei concetti primitivi in modo che siano verificati gli assiomi.

Per esempio:

$N=\{1, 2, ..., n, ...\}$	dove "1" sta per "unità" ed $n'=n+1$ per "successivo". (1.1)
$N_0=\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$	dove "0" sta per "zero" ed $n'=n+1$ per "successivo". (1.2)
$P=\{2, 4, ..., 2n, ...\}$	dove "2" sta per "unità" e $(2n)'=2n+2$ per "successivo". (2.1)
$P_0=\{0, 2, 4, .., 2n, ...\}$	dove "0" sta per "unità" e $(2n)'=2n+2$ per "successivo". (2.2)
$M=\{n, 2n, 3n, .., kn, ...\}$	dove "n" sta per "unità" e $(kn)'=kn+n$ per "successivo". (3.1)
$M_0=\{0, n, 2n, .., kn, ...\}$	dove "0" sta per "zero" e $(kn)'=kn+n$ per "successivo”. (3.2)
Per $a\neq0, A=\{1/a, 1/a^2, .., 1/a^k, ..\}$	dove "1/a" sta per "unità" ed $(1/a^k)'=1/a^k\cdot1/a$ per "successivo". (4.1)
Per $a\neq0, A_0=\{1/a^0, 1/a, ..., 1/a^k, ...\}$	dove "$1/a^0$" sta per "zero" e $(1/a^k)'=1/a^k\cdot1/a$ per "successivo". (4.2)
Per $b\neq0, B=\{b, b^2, ..., b^k, ...\}$	dove "b" sta per "unità" e $(b^k)'=b^k\cdot b$ per "successivo". (5.1)
Per $b\neq0, B_0=\{b^0, b, ..., b^k, ...\}$	dove "b^0" sta per "zero" e $(b^k)'=b^k\cdot b$ per "successivo". (5.2)

I primi tre modelli sono additivi, e gli elementi sono in progressione aritmetica di *ragione* le rispettive *unità*; gli ultimi due sono modelli moltiplicativi, e gli elementi sono in progressione geometrica di *ragione* le rispettive *unità.*

Negli esempi riportati ci sembra significativo osservare che tutti gli elementi degli insiemi considerati si possono ottenere mediante l'applicazione ripetuta dell'operazione *successivo*, che è alla base del sistema assiomatico di G.Peano, e che dipende sempre dall' *unità* e mai dallo *zero*, essendo questo *indifferente* rispetto a tale operazione.

Confrontando i due sistemi assiomatici di G.Peano ed i relativi modelli, si nota che si può passare dall'uno all'altro, scambiando tra loro le parole ″*unità*″ e ″zero″, sia nei concetti primitivi sia negli assiomi, *ma tale scambio non è sufficiente* per definire le operazioni di addizione e moltiplicazione.

Infatti per esempio in (1.1) e (1.2) tali operazioni saranno definite *dualmente* rispettivamente da:

i) $n+1=n'$ ii) $n+m'=(n+m)'$	i) $n.1=n$ ii) $n.m'=n.m+n, \forall n,m \in N$	(1.1)
i) $n+0=n$ ii) $n+m'=(n+m)'$	i) $n \cdot 0=0$ ii) $n \cdot m'=n \cdot m+n, \forall n,m \in N_0$	(1.2)

La struttura N_0 $(+, \cdot)$ è più ricca della struttura N $(+, \cdot)$ in quanto possiede un elemento neutro rispetto ad entrambi le operazioni; l'elemento neutro dell'operazione di moltiplicazione si comporta in entrambi i modelli in maniera ″naturale″ rispetto all'operazione di addizione[13] mentre l'elemento neutro dell'addizione in (1.2) ha rispetto all'operazione di moltiplicazione *un comportamento ″non naturale″*, in quanto $n \cdot 0=0$ $\forall n \in N$, cioè "lo zero distrugge" ogni naturale; *segue quindi* che l'elemento neutro dell'addizione non ha comportamento "*naturale*" anche rispetto all'operazione di divisione, inversa della moltiplicazione.

Analogamente le osservazioni fatte per (1.1) e (1.2) si possono fare in tutti i modelli riportati.

Si vede quindi che, *con l'introduzione dello zero, si modificano alcune delle proposizioni riguardanti l'Aritmetica*, mentre, nel campo più esteso (N_0) restano inalterate tutte le identità fondamentali.

Hanno escluso dalle loro trattazioni sui naturali la classe nulla e i numeri nulli: R.Dedekind[14], G.Cantor [15], G.Peano[16], E.Landau [15].

Diversamente da quelli di Peano i sistemi assiomatici di Padoa e Pieri possono essere usati indifferentemente, sia per introdurre i numeri naturali che gli interi assoluti, *basta intendere per numero che non è successivo di alcun altro, l'unità oppure lo zero.*

Storicamente, il considerare N o N_0 non è stato indifferente, anche se oggi l'apparente "somiglianza" è passata nell'insegnamento *della matematica a tal punto che con N si indica, senza mai specificare, l'insieme dei naturali, dove l'appartenenza dello zero o meno non è specificatamente detta.*

---

[13] Nel senso che costruisce naturali, infatti *n+1* è un nuovo numero e così $n+m \neq n$, $\forall m \in N$ e n fissato.

[14] R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri, Continuità e numeri Irrazionali*, [traduzione di O. Zariski], ed. A.Stock 1926, Roma, (Una edizione italiana del lavoro di Dedekind antecedente si trova nella rivista il Pitagora, Palermo, 1901, anno V, 2°sem, n.4-5).

[15] In[20],pag.126.

[16] G.Peano Dice *non naturale* il numero "zero" in [25] nelle note 1.2 e 1.4 di pag 29 e in 1.5 di pag 30.

4.1 Considerazioni finali.

Per il superamento di un ostacolo in generale si costruiscono situazioni a-didattiche ad hoc, forse ciò non è necessario per lo *zero,* poiché durante i normali corsi scolastici lo *zero* viene affrontato, a seconda dei suoi aspetti (cifra, insieme vuoto, elemento neutro e nullifico, equazione impossibile e indeterminata, limite.....), con diverse strategie didattiche che rimettono in discussione l'assimilazione del concetto di tale numero.

In un test fatto a studenti del primo anno di Matematica alla domanda: "*2/0* e *0/2* quale delle due espressioni ha significato in R", molte risposte sono state corrette (quelle errate venivano immediatamente corrette).

Interessanti sono le motivazioni date a seconda dell'indirizzo scolastico di provenienza.
Gli studenti provenienti dai Licei Scientifici e dagli Istituti Tecnici Industriali hanno risposto motivando così: 1) $2/0=\infty$ oppure 2) $\lim 2/x=\infty$.
Gli studenti provenienti dai Licei Classici hanno motivato prevalentemente in tal modo: 3) ″ *non esiste l'inverso di* $x=0$ ″.

Dal gran numero di risposte corrette si può dedurre che lo *zero* non risulta più un catalizzatore di errori e che la sistemazione è avvenuta in maniera coercitiva usando strumenti molto potenti (analisi e algebra).
Le motivazioni non corrette 1) e 2) rispecchiano il disagio degli studenti nei confronti della divisione per zero.
La motivazione 3) rispecchia l'assimilazione dell'astratto concetto di campo e non il naturale (*forse*) sviluppo o ampliamento numerico presente nei programmi scolastici.

Lo *zero* é un buon esempio per affermare che la sua eliminazione *avviene* (se *avviene*) se diventa come per i ″*matematici*″ un elemento del proprio ″*senso comune*″ cosa che non avviene, riteniamo, per studenti non di indirizzo scientifico (da verificare).

Quest'articolo ha cercato di dare una risposta alla domanda perché lo *zero* è un *catalizzatore* di errori oggi come cento anni fa, semplice è stata la diagnosi: *"è un ostacolo epistemologico";* difficile la cura in quanto necessita di diversi richiami, infatti nei diversi contesti lo *zero* assume significati diversi, logicamente accettati anche se non in accordo con il senso comune, che producono quasi sempre casi eccezionali nella teoria in esame (vedi geometria: figure degeneri, analisi:infinito, fisica: modelli astratti)

Lo *zero* urge di una presa di coscienza da parte dell'insegnante che fin dalla scuola elementare deve saperlo imporre con un suo ″*ruolo*″ ben distinto dagli altri numeri naturali, sicuramente sarà necessario mettere *bene* in evidenza ogni volta la peculiarità dello *zero*, non considerandolo soltanto nei casi limiti ma inserendolo nella teoria (vedi segmento nullo, angolo nullo, soluzione nulla,.....)

Appendice 1

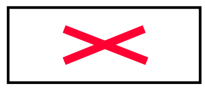
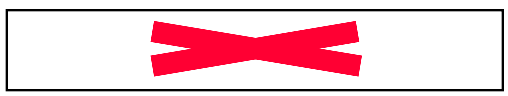
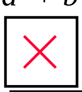
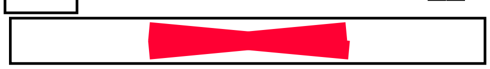
Dalla Rivista IL PITAGORA
(Giornale di Matematica per gli alunni della scuola secondaria)[17]
Riportiamo integralmente alcune pagine pubblicate sulla rivista con la sola differenza di scrivere in grassetto alcuni errori che ci hanno particolarmente interessato.

PRIMO ELENCO DI ERRORI

nei quali spesso cadono i nostri giovani

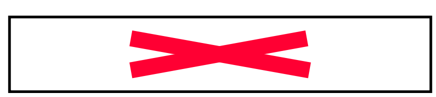
Il comitato Direttivo dell'Associazione *Mathesis* fra gl'insegnanti di matematica delle scuole medie in Italia, nelle adunanze dello scorso settembre a Milano, considerando l'utilità pè giovani delle scuole secondarie di avere sott'occhio un elenco degli errori nei quali più comunemente incorrono la maggior parte di essi, volle affidare al *Pitagora* un tale compito. Ed ecco il primo elenco che ci manda l'egr. prof. R. Bettazzi del Liceo Cavour di Torino, Presidente della *Mathesis*.

Invitiamo i giovani a volerci a loro volta mandare la ragione degli errori segnalati in questo elenco anche nei successivi che andremo pubblicando.

1. Fraz.apparente è quella che ha il numerat. *uguale* al denom.
2. Falsa scrittura di un seguito di operaz.:8+4=12:2=6-3=3ecc.
3. Nel ridurre allo stesso denominatore, scrivono: 
4. Operai 7× giorni 8 e simili.
5. Per giudicare se due grandezze sono proporz. Si accontentano di vedere se , crescendo l'una, cresce l'altra.
6. Nel trasformare le fraz. scrivono: 
7. Dicono che il quoz. della divisione di 50 per 7 non c'è.
8. M.3×m.5=m^2 15.
9. **Il diam. passa pei centro, *la corda non vi passa.***
10. **Dicendo un parallelogramma *qualunque*, intendono escluso che possa essere un rettangolo.**
11. Dicono come retta parall. o perpend. senza aggiungere altro.
12. Dicono retta *verticale* rispetto ad un piano.
13. La piramide è un solido *che ha per base*....;il prisma è un solido *che ha per basi*....
14. Il num. dell'art. è *identico* al num. positivo.
15. $a^2 + b^2 + 2c^2$ è *decomposto* in fattori così:a.*a.a.+b.b.b.+2c.c.*
16.  **oppure è uguale a *niente*** 
17.  ecc.
18 Nel mettere in evidenza un fattore, quando uno dei term. è questo fattore, lo lasciano: es. $2a^2+a-7a^3=a(2a-7a^2)$.

(Anno IV,1898,I semestre,pp.14/15)

SECONDO ELENCO DI ERRORI

1. Si confonde spesso *cifra* con *numero, fattore* con *termine, coefficiente* con *esponente*
2. .Incertezza nel determinare le cifre del quoz. p.es. dovendo dividere 1415 per 359, dicono :3 in 14 sta 4 volte coll'avanzo di 2, che posto innanzi ad 1, fa 21; 5 in 21 sta pure 4 volte, dunque il 4 è la cifra cercata, senza curarsi d'altro
3. Erronea riduzione di fraz. algebrica a minimi termini. Es. 

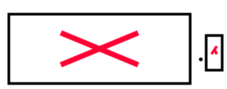
[17]Pubblicato dal 1895 al 1898 ad Avellino, dal 1899 al 1918 a Palermo, a cura di G. Fazzari

4. La perpend. ad una retta è quella che *non pende né a destra né a sinistra*
5. Confondono spesso *circonf.* con *circolo*
6. Afferm_ che il prg. è *quello* (?) che ha i lati opposti *uguali* e paralleli.

Prof.F.Imperato

(Anno IV, 1898, I semestre, p64)

ERRORI ed inesattezze comuni

1. *Si prolunghi* la retta *AB*
2. Il cerchio O tocca la retta *AB* nei due punti *A* e *B*
3. Sia O il punto di mezzo della *retta AB*
4. La retta AB *seca o taglia* il piano α nel punto *A*.
5 Negli esercizi scritti molti alunni fanno seguire all'enunciato di un *problema* la parola *dimostrazione*, e a quello di un *teorema* la parola *risoluzione*.
6. Si confondono spesso gli angoli *complementari* con quelli *supplementari*.
7. Nel dimostrare le proprietà valevoli per qualunque tr. gli alunni hanno l'abitudine di fare tr. *isosceli* o *equilateri*.
8. Un'equazione *non si altera* aggiungendo ad ambo i membri uno stesso num.
9. Centro in *O* e raggio eguale ad *OA* si descriva (in un dato piano) *un* cerchio; pel punto *A* si conduca *un* piano perpendicolare alla retta *AB*; pel punto *A* si conduca *una* perpendicolare al piano α; ecc.
10. I due segmenti *AB* e *CD* sono *proporzionali*.
11. $-4^2 = +16$.
12. I lati di un tr. stanno tra loro *come gli angoli* opposti.
13. Le superf. di due poligoni simili stanno tra loro *come i lati* omologhi.
14. Due poligoni sono simili, se hanno gli angoli eguali.
15. Se un numero è divisibile per due altri, è divisibile pel loro prodotto.
16. In ogni tr. rett. , il quadr. dell'ipotenusa è equivalente *ai quadrati* dei cateti.
17. **Talvolta si dividono ambo i membri di un'eguaglianza per una espressione avente il valore zero, e con ciò si ottengono risultati falsi.(Parecchi *paradossi matematici* sono fondati su questo errore).**
18. Alcuni alunni tralasciano spesso le parentesi , così invece di $(a+b)^2$, $sen(a+b)$, $log(a+b)$ scrivono $a+b^2$, $sen\ a+b$, $log\ a+b$.
19. *Un colmo:* Sopprimendo il fattore comune x, si ha: .

Prof. Corrado Ciamberlini

(Anno IV, 1898, I semestre pp.92,93)

Sono riportati nella rivista anche "inesattezze" ed "errori" presenti nei libri di testo, i libri di testo erano considerati uno strumento di riferimento costante per gli allievi, non solo per gli esercizi, ma perché era ritenuto importante leggere di "matematica" in modo naturale e per organizzare autonomamente le conoscenze e approfondire concetti.

Diverse questioni proposte sulla rivista avevano l'intenzione di stimolare l'approfondimento delle conoscenze degli alunni (con giochi a premi) e degli insegnanti, al fine di influire sulle capacità di comprensione delle diverse potenzialità delle proposte didattiche..

Gli errori che si sono "tramandati" fino ad oggi possono essere considerati di carattere didattico, creatisi nella trasposizione didattica..

In questa appendice abbiamo potuto verificare, attraverso la rivista, quali sono state le concezioni degli allievi e degli insegnanti, in un determinato periodo storico, rispetto ad alcuni concetti matematici, zero incluso.

Dal Test fornito in data 8 MAGGIO 1996 enucleiamo le domande concernenti la questione "zero".
1a) 0 è un numero pari? Motiva la risposta.
1b) 0 è un numero dispari? Motiva la risposta.
2a) 0 può essere multiplo? Se si, di quali numeri? Se no, motiva la risposta
2b) 0 può essere sottomultiplo? Se si, di quali numeri? Se no, motiva la risposta.

Riportiamo in una tabella le considerazioni riguardanti le osservazioni fatte nella fase sperimentale. Tale fase sperimentale ha per noi valore di pre-test. Seguiranno tutta una serie di indagini sperimentali accurate per meglio argomentare il ruolo dello "zero" come ostacolo epistemologico. L'analisi statistica va seguita con cura, con riferimento al problema didattico. Riteniamo di continuare nell'indagine sperimentale rivolgendoci essenzialmente ad allievi degli ultimi anni del liceo o a studenti del primo anno di Università inscritti in Facoltà scientifiche e non.

	Scuola Media dell'obbligo	Istituto Magistrale	Liceo Classico
Numero degli allievi	27 (35%) due classi.	21 (27%) una classe.	30 (38%),due classi.
Osservazioni	Le risposte ottenute sono poche rispetto al numero degli allievi 50 % Previsto in quanto è difficile per l'età degli allievi riuscire a dare motivazioni per iscritto. Le risposte corrette relative a 1a) e 1b) sono state il 20% e rispecchiano la presa di coscienza della serie naturale 0, 1, 2, 3,... Assenti le risposte corrette a 2a) e 2b), passa l'idea che multiplo è il numero più grande e il sottomultiplo quello più piccolo.	Le risposte ottenute sono il 50% Previsto in quanto è difficile per l'età degli allievi riuscire a dare motivazioni per iscritto. Assenti le risposte corrette; le risposte date rispecchiano la strategia didattica acquisita durante l'anno scolastico (cioè l'impostazioneassiomatica) (Previsto)Sembrano dimenticare le conoscenze fatte alla scuola media inferiore...	Le risposte ottenute sono 80% Previsto che le risposte corrette siano con motivazioni; non previsto invece che le risposte rispecchiano lo studio della filosofia acquisita durante l'anno scolastico.; sembrano aver dimenticato le conoscenze fatte alla scuola media inferiore. Le risposte ottenute hanno confermato le difficoltà sulle concezioni dello″zero″
Alcune risposte	1a) SI, perché viene prima di 1. 1b) NO, perché viene prima di un numero dispari.	1a) SI perché è un numero neutro 1b) NO perché è un numero neutro	1a) e 1b)[18]-Lo zero non è una quantità definita. -È un numero fittizio, (non esprime quantità). -Non può essere né pari né dispari.

[18]- Danno la stessa risposta per entrambe le domande.

Assiomi di Peano

″Arithmetices principia nova methodo exposita″ (1889)

Concetti primitivi.

Numero (intero positivo), unità, successivo e uguale (identità logica), indicati rispettivamente dai simboli: N , 1 , + ed =.

Assiomi

1) L'unità è un numero.
2) Se a è un numero, allora a = a.
3) Se a e b sono numeri, allora a = b e b = a.
4) Se a, b e c sono numeri e a = b e b = c , allora a = c.
5) Se a = b e b è un numero, allora a è un numero.
6) Il successivo di un numero è un numero.
7) Se i successivi di due numeri sono uguali, i numeri sono uguali.
8) L'unità non segue alcun numero.
9) Se una classe I di numeri contiene l'unità e il successivo di ogni suo numero, allora contiene ogni numero.

″Formulario″ (1891)

Concetti primitivi.

Numero (intero positivo), unità e successivo, indicati rispettivamente dai simboli: N, 1 e + .

Assiomi

P1) L'unità è un numero.
P2) Il successivo di un numero è un numero.
P3) Se i successivi di due numeri sono uguali, i numeri sono uguali.
P4) L'unità non segue alcun numero.
P5) Se una classe I di numeri contiene l'unità e il successivo di ogni suo numero, allora contiene ogni numero.
(Principio di induzione completa)

″Formulario″ (1898)

Concetti primitivi.

Numero (intero assoluto), zero e successivo, indicati rispettivamente dai simboli: N_0 , 0 e + .

Assiomi

$P_0$1) Zero è un numero.
$P_0$2) Il successivo di un numero è un numero.
$P_0$3) Se i successivi di due numeri sono uguali, i numeri sono uguali.
$P_0$4) Zero non segue alcun numero.
$P_0$5) Se una classe I di numeri contiene lo zero e il successivo di ogni suo numero, allora contiene ogni numero. (Principio di induzione completa)

Appendice 4

Dal sistema assiomatico di Pieri si deduce quello di Padoa

Infatti si ha:

$P_i2) \equiv P_d1)$
$P_i4) \Rightarrow L_1$
Lemma (L_1): Ogni numero è diverso dal suo successivo
Dim.- Se esistesse un numero n uguale al suo successivo, allora nella classe non vuota $I=\{n\}$ non esisterebbe alcun numero che non è successivo di alcun altro, contro la $P_i4)$.

$P_i3) \wedge P_i4) \Rightarrow P_d2)$
Dim.-Sia suc m=suc n, supponiamo per assurdo che sia $m \neq n$ e denotiamo con I la classe dei numeri diversi da n, I non è vuota poiché $m \in I$, allora per $P_i4)$ esiste almeno un $x \in I$ tale che $x \neq$suc y $\forall y \in I$, da ciò segue che $x \neq$suc m e quindi per ipotesi $x \neq$suc n.
Consideriamo adesso la classe di tutti i numeri $N=I \cup \{n\}$, N non è vuota e per $P_i3)$ e $P_i4)$ esiste ed è unico $z \in N$ tale che $z \neq$suc y $\forall y \in N$; inoltre poiché $x \neq$suc y $\forall y \in I$ e $x \neq$suc n è x=z, da ciò segue che $z \in I$ e $n \neq z$, infine poiché per L_1 $n \neq$suc n, deve esistere $t \in I$ tale che n=suc t, quindi $n \in I$ e ciò è assurdo.
$P_i1) \wedge P_i4) \Rightarrow P_d3)$
$P_i3) \wedge P_i4) \Rightarrow P_d4$
Dim.-Sia I una classe di numeri contenente un numero x che non è successivo di alcun altro e i successivi dei suoi elementi, supponiamo per assurdo che I non contenga tutti i numeri, esiste cioè un numero $y \notin I$ con $y \neq x$.
Sia J la classe dei numeri che non appartengono ad I, poiché $y \in J$, la classe non è vuota e per $P_i4)$ esiste almeno un numero $z \in J$ tale che $z \neq$suc t $\forall t \in J$, inoltre da $z \neq x$ per $P_i3)$ deve esistere almeno un numero w tale che z=suc w con $w \notin J$ e quindi $w \in I$, per ipotesi allora $z \in I$, ma ciò è assurdo poiché I e J non hanno elementi in comune, perciò I deve contenere ogni numero.

Dal sistema assiomatico di Padoa si deduce quello di Pieri

Infatti si ha:

$P_d3) \Rightarrow P_i1)$
$P_d1) \equiv P_i2)$
$P_d1) \wedge P_d4) \Rightarrow T_1 \equiv P_i3)$
$P_d4) \Rightarrow P_i4)$
Dim.-Sia I una classe non vuota di numeri, se I contiene quell'unico numero x che non è successivo di alcun altro $P_i4)$ è provato, altrimenti sia J la classe dei numeri che non appartengono ad I e supponiamo che per I non valga $P_i4)$. Dato che $x \in J$ e se $n \in J$ allora suc $n \in J$ (perché se così non fosse suc $n \in I$ ed I conterrebbe un numero che non è successivo di alcun numero di I), allora per $P_d4)$ J contiene ogni numero ed I è vuota contro l'ipotesi.

Da quanto precede si deduce che, il sistema assiomatico di Pieri è equivalente a quello di Padoa e quindi a quello di Peano.

Appendice 5

Riportiamo integralmente alcune pagine pubblicate in :Saggi di Didattica Matematica, raccolta di scritti vari 1920,Torino, G.B. Paravia,pp.94,96.

Le grandezze nulle nella Matematica elementare
(Estratto dal *Bollettino di Matematica* ,a. 2°, n. 2 , 1903)

1. Generalmente, nei vari trattati di Geometria razionale elementare, non si fa nessuna considerazione speciale sulle *grandezze nulle*, le quali , tuttavia, compariscono molto spesso, più o meno velatamente, nello studio della Geometria. Ora a me pare che, *come nell'Aritmetica e nell'Algebra s'introduce il numero zero e si fanno le dovute considerazioni,* così nella Geometria razionale si dovrebbero porre le necessarie premesse sulle grandezze nulle, se , com'è giusto, si vuole che nessun dato dell'intuizione dimenticato dalle definizioni o nei postulati, entri poi nascostamente nelle proposizioni e nei ragionamenti. In questa nota mi propongo appunto di dimostrare, per mezzo di alcuni esempi comuni, la necessità di porre queste premesse.

2. Ordinariamente, il segmento vien dato come parte di retta limitata da due punti, e si definisce poi la differenza di due segmenti nell'ipotesi che essi siano diseguali. Nessun cenno speciale vien fatto per i segmenti nulli, né per la differenza di segmenti eguali: si aggiunge esplicitamente da qualche autore
che la sottrazione dei segmenti è possibile solo quando il primo è maggiore del secondo. La distanza di due punti è definita soltanto nel caso generale in cui i due punti siano distinti; La distanza di un punto da una retta nel caso in cui il punto non appartenga alla retta; ec. *Logicamente,* non si potrebbe quindi in seguito parlare dei segmenti che congiungono i punti con sé stessi, né di distanze di punti coincidenti, né di differenze di segmenti eguali; ma se esaminiamo gli enunciati di varie proposizioni della Geometria elementare, ci persuadiamo subito che del *concetto intuitivo* di segmenti nulli e di distanze nulle noi facciamo uso spessissimo.

3.Ecco degli esempi.

- "La condizione necessaria e sufficiente perché un punto del piano di un cerchio sia interno ad esso è che il segmento che lo congiunge col cerchio sia minore del raggio".-Il caso particolare che il punto sia il centro dovrebbe qui far eccezione pel fatto che non c'è in tal caso il segmento che conduce il punto col centro.
- "In ogni triangolo ciascun lato è maggiore della differenza degli altri due". -Questo teorema non potrebbe esser posto in forma così generale, se nel definire la differenza dei segmenti si esclude che questi siano eguali.
- "Se una retta ha dal centro di una circonferenza distanza minore del raggio, essa ha colla circonferenza due soli punti comuni".-Il caso in cui la retta passi pel centro dovrebbe far eccezione per le ragioni dette sopra.
- Di due corde diseguali d'uno stesso cerchio la maggiore è la meno distante dal centro, cosicché la corda massima è in ogni cerchio il diametro".- Se la distanza nulla non è definita, la seconda parte di questa proposizione non potrebbe essere conseguenza della prima.
- Tra i segmenti che congiungono i punti d'una circonferenza con un punto che non sia il centro, il minimo è il segmento normale che non contiene il centro".-Si dovrebbe qui escludere il caso in cui il punto appartiene alla circonferenza perché in tal caso quel segmento normale non c'è.
- Se la distanza dei centri di due circonferenze è minore della differenza dei raggi, esse non hanno nessun punto comune e una di esse è interna all'altra".-Il caso delle circonferenze concentriche non potrebbe essere compreso in questo enunciato.
- Il luogo dei punti equidistanti da due rette concorrenti è costituito dalle bisettrici dei loro angoli". -Ogni punto del luogo dovrebbe essere equidistante dalle due rette date, ma non si può parlare di distanze

del punto d'incontro dalle due rette.

Affinché tutte queste proposizioni possono essere enunciate sotto forma così generale, è, come ognun vede, necessario premettere delle considerazioni sui segmenti nulli.

4. Osservazioni analoghe alle precedenti possono essere fatte per gli angoli e gli archi, affine di mostrare la necessità di porre delle premesse relative agli angoli e agli archi nulli.

Se nel definire la differenza di due angoli si esclude il caso che essi siano eguali, non si può, per esempio, enunciare in modo affatto generale la proposizione: "In ogni triedro ciascuna faccia è maggiore della differenza delle altre due", l'esclusione degli angoli e degli archi nulli nella geometria elementare non è in armonia colle considerazioni che, in trigonometria, si fanno sulle funzioni degli angoli od archi di 0°.

5 Quanto precede si può estendere alle altre grandezze geometriche: poligoni, solidi, ec.

Dopo aver dimostrato che: "in un triangolo il quadrato di un lato è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due aumentata o diminuita del doppio rettangolo di uno dei due lati e della proiezione dell'altro su questo, secondo che l'angolo *A* opposto al primo lato è ottuso oppure acuto, qualche autore fa l'osservazione: "Se l'angolo *A* è retto , il doppio rettangolo *si annulla* , perché la proiezione di un lato sull'altro è *nulla*, e si ricade sul teorema di Pitagora. Ora, quest'osservazione è utilissima, in quanto che aiuta l'alunno a collegare insieme proposizioni diverse, ma affinché essa sia *logicamente* giusta è necessario aver premesso le considerazioni speciali sui poligoni nulli.

Nella dimostrazione del teorema : in ogni triangolo la somma dei quadrati di due lati è equivalente al doppio della somma dei quadrati della mediana corrispondente al terzo lato e della metà di questo terzo lato, si considera ordinariamente soltanto il caso generale in cui la mediana non sia anche altezza, e forse s'intende che quanto è detto per questo caso valga tale e quale pel triangolo isoscele. Ma neppure questo è lecito se non si pongono le premesse necessarie sulle grandezze nulle.

Nella teoria della misura si enuncia il principio generale" se per ogni classe di grandezze se ne fissa una come unità di misura, ne consegue che ciascuna classe di grandezze è in corrispondenza univoca colla classe dei numeri". Ora, affinché questa corrispondenza abbia luogo in modo completo occorre che in ciascuna classe vi sia anche la grandezza corrispondente al *numero zero*, che inutilmente comparirebbe nell'Aritmetica se non fosse il rappresentante di una grandezza.

Nota. -Sullo stesso argomento si legga, per es., la nota: Segmento nullo del dott. Ercole Cantoni ("Pitagora, a.XV,nn.1,2,3). Del contenuto del precedente articolo si valsero, per es., il prof. Nannei nella 2° edizione della sua *Geometria* (Milano,Vallardi,1905);e il prof. Riboni, che nell'edizione del 1902 della sua geometria non parlava di segmenti e angoli nulli, mentre ne parla nella 7°edizione (pag.18 e 24).

Bibliografia

[1] Barrow J.D. *Pi in the Sky Couting, Thinking, and Being,* 1992 Oxford Univ.Press [trad.Cannillo T, *La luna nel pozzo cosmico,* 1994, Milano, Adelphi ed.S.p.A].

[2] Brousseau G. *Fondements et méthodes de la didactique de mathématiques*, Recherces en didactique des Mathématiques, 1986, Grenoble ed. la Pensée Sauvage, Vol.7.2.

[3] Camarda S.-Magro M.T.-SpagnoloF. *Il concetto di numero* , 1982, Firenze Giunti Marzocco.

[4] Ciamberlini C. *Le grandezze nulle nella Matematica elementare*, 1920, Torino, Saggi di Didattica Matematica, Raccolta di scritti vari, G.B.Paravia & C.pp.94, 96.

[5] Di Leonardo M.V.-Marino T.-Spagnolo F. *Alcune osservazioni didattiche ed epistemologiche sul postulato diEudosso-Archimede ed il metodo di esaustione,* 1994, Bologna La Mat. e la sua didattica, ed.Pitagora, n. 1, pp.25, 37.

[6] Di Leonardo M.V.-Marino T.-Spagnolo F. et Alii *Considerazioni su alcuni articoli di Didattica della Matematica della rivista "il Pitagora",* 1994 , Bologna La Mat. e la sua didattica, ed.Pitagora, n. 4 pp.383, 389.

[7] Enriques F. *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari,* 1900, Bologna Vol.1, parte 8.VI, Zanichelli, (ristampa 1983).

[8] Ferrari M. *I nuovi programmi per la Scuola Elementare: ARITMETICA*, 1985 Paderno del Grappa L'inseg. della Mat: e delle Scienze integrate, vol 8, N 14, Agosto, pp.5, 15.

[9] Freudehantal H. *Ripensando l'educazione matematica*, (a cura di F. Manara) 1994.Brescia ed. La Scuola

[10] Gigli D. *Aritmetica generale*, Enciclopedia delle Matematiche Elementari (a cura di Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli), Vol.I, parte I, 1930, Milano, Hoepli, pp.81, 212.

[11] I.R.R.S.A.E. Sicilia Servizio documentazione e informazione collana documenti, 1989, VIII, Area matematica- *Nuovi programmi per la scuola elementare*.

[12] Klein J. *Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra,* MIT Press, Cambridge, Massachusetts 1968, pp.46, 47.

[13] Kline M. *Storia del pensiero matematico*, 1991, Torino Einaudi.

[14] Krygoska A.Z. *Processi cognitivi e apprendimento della mat: nella scuola elementare-Le variabili del ragionamento matematico dei bambini all'età di otto anni,* (a cura di G. Prodi) 1984 Brescia ed. La Scuola, pp.7, 18.

[15] Landau E. *Foundations of Analysis*, 1966 New York Chelsea Publishing,Company.

[16] Marino T.-Spagnolo F. "*Il Pitagora", Atti del convegno per il 75°compleanno di C.F.Manara*, Milano,10-11 Aprile 1991.

[17] Marino T- Spagnolo F. *Alcune considerazioni storiche su "IL PITAGORA" (Giornale di*

Matematica per gli alunni delle scuole secondarie), Comunicazione convegno storia della didattica, Milano aprile 1991. Catania,1991, Quaderni del Gruppo di ricerca didattica di Catania e Palermo, settembre 1991, pp.115, 118.

[18] Marino T.- Spagnolo F. *Gli ostacoli Epistemologici: Come si individuano e come si utilizzano nella ricerca in Didattica della Matematica*, L'insegnamento della. matematica e delle scienze integrate, vol.19B, n.2, Aprile 1996.

[19] Mariotti M.A. *Lo zero. E' un problema?,* 1986, Cagliari, L'educazione matematica, a.VII, Serie II, Vol.1,n.3, pp.263, 277.

[20] Natucci A. *Il concetto di numero e le sue definizioni*, 1923 Torino ed. Bocca.

[21] Padoa A. *Théorie des nombres entiers absolus*, 1902, Torino Revue de Math.Vol. VIII, ed. Bocca, pp.45, 54.

[22] Peano G. *Arithmetices Principia nova methodo exposita,* Opere scelte, U:M:I:, 1959, Roma ed. Cremonese, Vol.III, pp20, 55.

[23] Peano G. *Sul concetto di numero,* Opere scelte, U:M:I:, 1959,Roma ed. Cremonese, Vol.III, pp.80, 109.

[24] Peano G *I fondamenti dell'Aritmetica nel Formulario del 1898*, Opere scelte, U:M:I:, 1959, Roma ed. Cremonese, Vol.III, pp.215, 231.

[25] Peano G. *Aritmetica generale e algebra*, 1902,Torino, ed. G.B. Paravia & C.

[26] Peano G. *Sui libri di testo per l'aritmetica nelle scuole elementari*, Opere scelte U.M.I. .1959, Roma ed. Cremonese, Vol.III, pp.441, 446.

[27] Pellerey.M. *Quaderni OASI*, 1979, Troina (En), n.4.

[28] Pieri M. *Sopra gli assiomi aritmetici,* Opere sui fondamenti della Matematica ,U.M.I. 1980, Bologna ed. Cremonese, pp.449, 453.

[29] Prodi.G. *Analisi Matematica*, 1970, Torino ed. Boringhieri.

[30] Rotman B. *Signifying Nothing,The Semiotics of zero*, 1987, Stanford University Press Stanford, California, [trad. Faraone D. *Semiotica dello zero*, 1988, Milano ed. Spirali].

[31] Singer C. *A Short History of Scientific Ideas to 1900*, 1959, Oxford University Press, London, [trad. Tedeschi Negri F. *Breve storia del pensiero scientifico,* 1961, Milano ed. Einaudi].

[32] Spagnolo F. *Obstacles Epistémologiques: Le Postulat d'Eudoxe-Archimede*, (Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Bordeaux I (Francia), Luglio 1995. ed.Atelier National de Reproduction des Théses Microfiches (BP - 38040 Grenoble Cedex 9 - Francia) e in Quaderni GRIM di Palermo per la diffusione in Italia (Supplemento al n.5, 1995).

[33] Spagnolo F. *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*, 1998,Milano,ed.La Nuova Italia.

[34] Vitali .R. *Lo zero presso i Greci*, 1987, Roma, Armando Editore, La mat. e la sua didattica, n.1, pp.42, 44.