

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PALERMO
FACOLTÀ DI SCIENZE

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

**ANALISI SPERIMENTALE DI ALCUNE
FASI DEL PASSAGGIO DAL PENSIERO
ARITMETICO AL PENSIERO
ALGEBRICO**

Tesi di Laurea di:
Benedetto Di Paola

Relatore:
Ch.mo Prof. T. Marino

Anno Accademico 2002/2003

Introduzione

Scopo di questa tesi è quello di definire, in una prima approssimazione, il pensiero algebrico e studiarne le interazioni con il pensiero aritmetico.

Avendo, infatti, sposato l'idea che il pensiero algebrico si è sviluppato nei secoli soltanto dopo che si è enucleato il pensiero aritmetico (almeno per la cultura occidentale) mi è sembrato di particolare interesse studiare alcune delle fasi del passaggio dal pensiero aritmetico a quello algebrico.

Il lavoro segue principalmente due linee fondamentali: una di carattere generale con la finalità di dare un quadro storico dell'Algebra, analizzando il lungo e difficile percorso di crescita di questa disciplina; l'altra, che costituisce il nodo centrale del mio studio, che si articola attorno all'analisi di un'esperienza didattica ed ai comportamenti degli allievi nella risoluzione di un test. L'esperienza si è svolta lo scorso anno presso tre scuole di Palermo¹. In collaborazione con la Prof. Della Ratta, la Prof. Messina, il Prof. Briguglia e la Prof. Mocciaro, sono stati proposti ai ragazzi (in totale 148 studenti) sette quesiti espressi in differente linguaggio: alcuni in linguaggio naturale, altri in linguaggio propriamente algebrico, volendo indagare sulle loro strategie risolutive aritmetiche ed algebriche.

¹ Liceo Classico Garibaldi, Liceo Scientifico Galileo Galilei, Istituto Tecnico Commerciale Pareto.

Nel corso del quarto anno del corso di laurea in Matematica, ho avuto il mio primo approccio con questo tipo di sperimentazione realizzando uno studio dal titolo “Gli approcci al Numero Naturale: analisi comparativa di relazioni presentate nel corso di Didattica della Matematica 1”², pubblicato in INTERNET sul sito del Dipartimento di Matematica <http://dipmat.math.unipa.it/>.

² Corso tenuto dal Prof. F.Spagnolo presso la Facoltà di Scienze della Formazione Primaria. Anno Accademico 2000/2001.

Capitolo 1

1.0 Cosa si intende per pensiero algebrico (Analisi dello sviluppo storico dell'Algebra)

Definire il pensiero algebrico è indubbiamente difficile e richiede parecchie riflessioni e considerazioni. In prima approssimazione, come primo approccio quindi, ho consultato un dizionario della Matematica e ho letto alla voce “Algebra” la definizione riportata.

In maniera pragmatica ho scelto il dizionario Collins della Matematica, uno dei dizionari più comuni in commercio.

In esso, per definire il vocabolo “Algebra”, vengono proposte sei definizioni evidenziando quindi una certa difficoltà nel darne una unica. Di queste riporto soltanto la prima, la più significativa per il lavoro che mi propongo di fare, presentata dal dizionario in due sottodefinitzioni 1a. ed 1b..

“1a. La branca della Matematica elementare che generalizza l’Aritmetica utilizzando *variabili* che assumono valori numerici, ad esempio, nelle *identità* aritmetiche quali $x+y=y+x$.

1b. in particolare, l’utilizzazione di simboli per le quantità incognite, allo scopo di determinare il valore di queste mediante le *operazioni elementari* dell’Aritmetica.”

(Cfr. [17] pag. 13)

Viene naturale fare alcune puntualizzazioni. Per prima cosa si può notare che gli autori riportano, nella definizione del vocabolo, delle parole scritte in corsivo che, per avere una conoscenza specifica della parola cercata, debbono essere approfondite. Riportiamo, quindi, i riferimenti alle voci: *Variabili*, *Identità* ed *Operazione elementare*:

Variabile: “un’espressione a cui può essere assegnato un qualsiasi valore di un insieme di valori.” (Cfr. [17] pag. 13)

Identità: “un’uguaglianza universalmente vera, che non è risolta solamente per alcuni particolari valori delle variabili, ma che è vera per tutti i valori di queste.”

(Cfr. [17] pag. 13)

Operazione elementare: “una delle operazioni matematiche di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed estrazione di radici intere.”

(Cfr. [17] pag. 13)

È inoltre importante riflettere sulla frase “...generalizza l’Aritmetica”. Cosa significa che l’Algebra generalizza l’Aritmetica? Un primo approccio per rispondere a questa domanda potrebbe essere quello di consultare anche la definizione di “Aritmetica”.

La parola Algebra, allora, per poter essere definita ha bisogno di almeno altre quattro definizioni, non considerando ulteriori riferimenti per ognuna delle voci ricercate: **variabile**, **identità**, **operazione elementare** ed **Aritmetica**.

Tutto questo “percorso” individua la difficoltà di definire i termini Algebra e pensiero algebrico.

Risolvere problemi algebrici, come per esempio equazioni di 1° o 2° grado, in prima battuta potrebbe sembrare semplice in quanto non si richiede altro che la conoscenza delle operazioni nei vari insiemi numerici ed i rudimenti dell'Algebra; ma un'analisi retrospettiva dello sviluppo storico di questa disciplina mostra che per molti secoli essa è rimasta indietro rispetto per esempio alla Geometria e che la costruzione del simbolismo, caratteristica fondamentale del pensiero algebrico, ha avuto un decollo lento e difficoltoso.

È fondamentale, allora, prima di addentrarci nello studio del pensiero algebrico e analizzare il legame tra questo ed il pensiero aritmetico, tracciare un quadro storico dell'Algebra, ripercorrendo le varie tappe del suo sviluppo.

Non è mia intenzione, né sarebbe possibile in questo contesto, tracciare un itinerario completo ed esaustivo. Presentando il lungo e tortuoso cammino di crescita di questa disciplina più che considerare la storia dei concetti mi limiterò ad analizzare lo sviluppo del sistema dei simboli usati per esprimere i medesimi avendo accennato allo stretto legame fra il pensiero algebrico ed il simbolismo e ne fornirò qualche esempio.

1.1 Percorso storico

Seguendo il pensiero dello studioso G. H. Nesselmann (Cfr. [1], [18]) si possono individuare, nella storia dell'Algebra, tre stadi distinti:

1) **Fase retorica** (anteriore a Diofanto di Alessandria, 250 d.C.)

Un'Algebra verbale, tutta a parole, senza simboli.

2) **Fase sincopata** (da Diofanto alla fine del secolo XVI)

Vengono introdotte delle abbreviazioni per le incognite ma i calcoli sono eseguiti tutti in linguaggio naturale.

3) **Fase simbolica** (introdotta da Viète, 1540-1603)

Si usano le lettere per tutte le quantità, incognite o meno, e si “sfrutta” l'Algebra non soltanto per scoprire il valore dell'incognita, come nella seconda fase, ma per provare regole che legano le varie quantità ed esprimere così le soluzioni generali.

Le tre fasi evidenziate segnano una crescita del pensiero algebrico. Si parte da un linguaggio del tutto verbale, senza simboli, per arrivare ad un utilizzo totale del metodo simbolico per ogni argomentazione.

L'Algebra retorica e quella sincopata, come è facile ipotizzare, erano abbastanza semplici da seguire e capire; ciò che ha creato non pochi problemi è stato invece il passaggio alla III fase.

Consideriamo, allora, più dettagliatamente le tre fasi.

1.1.1 I FASE

I Babilonesi (Cfr.[9], [14])

Il popolo dei Babilonesi mostrava già una certa abilità numerica ed algebrica nella risoluzione di vari problemi, anche se la loro tecnica era del tutto elementare.

Essi conoscevano un sistema di regole di calcoli per i numeri Naturali e Razionali positivi ed oltre alle quattro operazioni usuali sapevano lavorare con le potenze di 2 e di 3 e le radici quadrate e cubiche.

I quesiti venivano enunciati e risolti verbalmente e ci si preoccupava di mettere in luce soltanto i passaggi necessari per ottenere la soluzione, senza giustificare le regole usate nello svolgimento.

Il linguaggio usato era per lo più di stampo geometrico in quanto molti problemi algebrici nascevano da situazioni geometriche.

Le parole più comunemente usate come incognite erano: us (lunghezza), sag (larghezza) e asa (area).

Si ritrovano inoltre dei simboli speciali, simboli pittorici sumerici, non usati nel linguaggio corrente.

Un classico problema dell'Algebra babilonese più antica era del tipo: "Trovare un numero che aggiunto al suo reciproco sia un numero positivo dato b ".

La sua risoluzione conduceva ad un'equazione di secondo grado del tipo $x^2 - bx + 1 = 0$ con $b > 0$, la cui formula risolutiva era ben conosciuta dai Babilonesi.

Gli Egiziani (Cfr.[9], [14])

La Matematica, per gli Egiziani, era uno strumento, un insieme di semplici regole (non dimostrate) che servivano per risolvere problemi di vita quotidiana.

La loro Algebra e la loro Aritmetica erano, quindi, molto limitate e non vi è traccia di alcun simbolismo. Nei papiri recuperati si ritrovano problemi, risolti in linguaggio puramente aritmetico, che tradotti in linguaggio algebrico si possono ricondurre ad equazioni lineari ad un'incognita.

"Anche loro, come i Babilonesi, enunciavano e risolvevano i quesiti in maniera del tutto verbale non spiegando né per quale motivo utilizzavano quel determinato metodo per lo svolgimento né perché esso funzionava in quel contesto." (Cfr. [14] pag.25).

I Greci (Cfr.[9], [14])

I Greci diedero certamente un contributo importante nell'evoluzione della teoria Matematica in quanto è proprio negli scritti dei matematici del periodo classico che si ritrovano le prime "dimostrazioni".

È infatti importante puntualizzare che, a differenza dei Babilonesi e degli Egiziani, gli studiosi greci non volevano soltanto “usare” la Matematica come strumento di calcolo, bensì cercavano sempre di giustificare le regole impiegate nei calcoli algebrici.

Certamente non si può ancora parlare di assiomatizzazione dell’Algebra, ma si tende ad una maggiore consapevolezza dei procedimenti usati.

La miglior parte dell’opera dei matematici del periodo classico è giunta sino a noi tramite gli scritti di Euclide (foto a lato).

La sua opera più famosa è “Elementi”, tredici libri nei quali si dimostrano molte regole di calcolo.



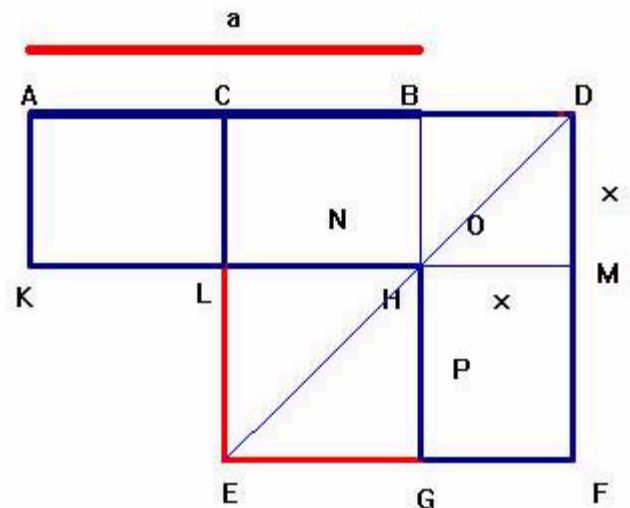
Volendo dare un esempio si può prendere in esame il II libro (nel quale l’autore giustifica alcuni risultati fondamentali dell’Algebra moderna utilizzando un linguaggio del tutto geometrico) ed in particolare soffermarsi sulla proposizione 6 nella quale viene risolto geometricamente un problema, che enunciato algebricamente si presenta sotto forma di equazione di secondo grado ad un’incognita con coefficienti positivi.

Proposizione 6

Se si divide per metà una linea retta, ed un’altra le è aggiunta per diritto, il rettangolo compreso da tutta la [prima] retta, più quella aggiunta e dalla retta aggiunta, insieme col quadrato della metà

[della prima], è uguale al quadrato della retta composta dalla metà [della prima] e dalla retta aggiunta.

Si divida per metà il segmento AB, e si chiami C il punto medio. Sul prolungamento di AB si prenda il punto D. Sul segmento AD si costruisca ora il rettangolo avente una dimensione coincidente con la misura di AD e l'altra con la misura di BD.



Si può far vedere che tale rettangolo più il quadrato di lato CB è equivalente al quadrato di lato CD.

Costruzione:

Si costruisca su CD il quadrato CDFE e se ne tracci la diagonale DE, per il punto B si tracci il segmento di perpendicolare BG e per il punto H (intersezione di DE con BG) si conduca KM parallelamente ad AD.

Poiché AC è uguale a CB, i rettangoli ACLK e CBHL sono uguali; come pure i rettangoli CBHL e HMFG (hanno le stesse dimensioni). Quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza i rettangoli ACLK e HMFG sono uguali.

Se al primo rettangolo (ACLK) si aggiunge CDML otteniamo il rettangolo ADMK. Se al secondo rettangolo (HMFG) aggiungiamo sempre CDML otteniamo il cosiddetto “*gnomone*” NOP.

Quindi, poiché somme di figure uguali, il rettangolo ADMK è equivalente allo “*gnomone*” NOP .

Ma il rettangolo ADMK è proprio il rettangolo di dimensioni AD e DB dell’enunciato della proposizione; infatti DM è uguale a DB (essendo l’angolo DHM di 45° - perché corrispondente di HEG, considerando le parallele KM e EF tagliate dalla trasversale DE e conseguentemente il triangolo rettangolo DHM isoscele).

Lo “*gnomone*” NOP è equivalente al rettangolo di dimensioni AD e DB: aggiungiamo ora sia allo “*gnomone*” NOP che al rettangolo (AD,DB) il quadrato LHGE uguale al quadrato costruito su CB: il rettangolo (AD,DB) + quadrato (CB) è equivalente allo “*gnomone*” NOP + quadrato (EG), ma quest’ultima somma costituisce tutto quanto il quadrato CDFE, costruito cioè sul segmento CD.

Siamo così arrivati a dimostrare che se si divide una linea retta, la figura così composta [rettangolo (AD,DB) + quadrato (CB)] è equivalente al quadrato(CD) ... secondo l’enunciato della proposizione n° 6 del Libro II degli Elementi di Euclide.

Se si indicano, allora, le lunghezze di AB con “a” e di BD con “x”,
 l’enunciato della II,6 cioè: $r(AD*BD) + q(CB)=q(CD)$ può tradursi con
 (lettura testuale):

$$(a+x)x+(a/2)^2= (a/2+x)^2$$

abbiamo, quindi, lo sviluppo del quadrato di un binomio (somma).

Possiamo però leggerci anche la differenza di due quadrati, vale a dire si ha
 l’equazione di 2° grado: $(a+x)x = S$:

$$S= (a/2+x)^2-(a/2)^2$$

(cioè un rettangolo espresso come differenza di due quadrati, differenza
 equivalente, attraverso il teorema di Pitagora, ancora ad un quadrato.)

Estraendo la radice quadrata:

$$x = \sqrt{S+(a/2)^2}-(a/2)$$

Tornando ad analizzare il contributo greco nell’evoluzione dell’Algebra c’è
 da sottolineare che, secondo il pensiero dello studioso Bourbaki, i metodi
 geometrici utilizzati massicciamente dai Greci, e quindi in particolare da
 Euclide, non sono stati certamente utili allo sviluppo autonomo dell’Algebra in
 quanto: “... il progresso verso il rigore va accompagnato in Euclide di una
 paralisi, ed in alcuni punti anche di un tornare indietro, nello sviluppo del
 calcolo algebrico. Il predominio della geometria blocca lo svolgimento
 autonomo della notazione algebrica, gli elementi che appaiono nei calcoli
 devono essere sempre rappresentati geometricamente ...”(Cfr. [19] pag. 75).

Gli inizi dell'Algebra, quindi, non trovarono adeguati sviluppi nell'antica Grecia se non in periodo molto tardo con Diofanto di Alessandria (250 circa d.C.) e Erone (100 d.C.) che iniziarono a trattare i problemi aritmetici ed algebrici non "appoggiandosi" alla Geometria.

1.1.2 II FASE

Diofanto (Cfr. [9], [14])

Soltanto con il declino della Matematica greca antica si risvegliò l'interesse per l'Algebra e l'Aritmetica e si cominciò a considerare le due discipline come indipendenti dalla Geometria. Con Diofanto e le sue scritture si entra espressamente nella II fase.

La storia dell'Algebra comincia effettivamente con Diofanto in quanto è a lui che si deve l'introduzione di un simbolo speciale per l'incognita. Un'innovazione di importanza pari a quella dell'introduzione dello zero.

Egli indicava per esempio con il simbolo greco ξ il "numero del problema", con Δ^y il "quadrato del numero", con K^y il "cubo del numero" e così via per le altre potenze.

L'operazione di addizione veniva raffigurata scrivendo i termini da sommare uno di seguito all'altro e per la sottrazione si usava il simbolo $/ \setminus$. Non vi erano ulteriori segni per la moltiplicazione, la divisione.

Superato quindi il primo stadio nell'evoluzione storica dell'Algebra, in questo secondo stadio persiste ancora il linguaggio Naturale ma vengono usate delle abbreviazioni che rendono più veloci i calcoli da eseguire.

Diofanto è una delle figure più enigmatiche della storia della Matematica in quanto di lui non si sa quasi nulla: si ritiene che sia vissuto intorno al 250 d.C. e che alcuni dei suoi scritti siano: la "Aritmetica", i "Porismi", ed i "Numeri poligonali".

Dei 13 libri della "Aritmetica" di Diofanto rimangono oggi soltanto sei libri scritti in greco e altri quattro in lingua araba.

La "Arithmetica" di Diofanto presenta una raccolta di problemi "algebrici", più di cinquanta tipi distinti che conducono ad equazioni di primo, secondo e terzo grado, in una o più incognite.

Ciascuno di questi viene risolto con un metodo differente ed in nessuno si utilizzano, per la risoluzione, rappresentazioni geometriche dei numeri.

È, ad esempio, interessante considerare il problema 7 del libro I che, espresso in un linguaggio puramente algebrico, conduce ad un'equazioni di 1° grado ad un'incognita.

Problema 7, Libro I:

Sottrarre dallo stesso numero due numeri dati così che le differenze saranno tra loro in un rapporto dato.

Risoluzione:

Si tratta quindi di risolvere, indicando con il simbolo x il numero incognito, un'equazione del tipo $(x-a)/(x-b)=K$

Supponiamo che i numeri da sottrarre dallo stesso numero x siano 100 e 20 e che la più grande delle differenze sia 3 volte la più piccola.

Se 100 e 20 sono i numeri da sottrarre, allora la differenza maggiore (Diofanto lavora con numeri positivi) sarà $x-20$ e la minore ovviamente $x-100$. Sicchè l'equazione $(x-a)/(x-b)=K$ diventa: $(x-20)/(x-100)=3$ ovvero $3(x-100)=x-20$ e quindi $3x-300=x-20$. Sommando il difetto (300) ad entrambi i membri si ha $3x=x+280$ e quindi sottraendo ad entrambi i membri la stessa quantità si ha $2x=280$ e dunque il numero richiesto è $x=140$. Infatti $140-100=40$, $140-20=120=3*40$

Gli Indiani (Cfr. [9], [14])

Nel periodo fra il 200 e il 1200 d.C. si manifestò un grande sviluppo della matematica indiana messo in evidenza da un linguaggio articolato ed un simbolismo sempre più efficiente che permise loro di raggiungere risultati importanti.

I matematici più importanti di questo periodo furono: Aryabhata, Brahmagupta e Bhaskara. Anche loro come i predecessori usavano delle abbreviazioni per rappresentare l'incognita e le sue potenze: "ya" (prima

sillaba della parola yavattavat (tanto-quanto) indicava la x , con “va” si indicava la x^2 e così via per le altre potenze.

Per indicare l’addizione non c’era nessun simbolo e lo stesso si può dire per il prodotto che veniva rappresentato scrivendo di seguito i due fattori. Per la sottrazione si utilizzava invece un punto sopra il sottraendo ed infine per denotare un’uguaglianza di due quantità ci si limitava a scrivere i due membri in due righe consecutive.

Quando poi, in un determinato problema, comparivano più incognite, allora si adottavano vari colori e si indicavano le incognite con le rispettive prime sillabe dei vari colori usati.

Questo simbolismo anche se rudimentale è sufficiente per classificare l’Algebra indiana come “quasi simbolica”. La loro Algebra infatti, come detto, non è più soltanto verbale, espressa a parole e senza l’ausilio del simbolismo (fase retorica), ma non può neanche considerarsi del tutto appartenente alla terza fase, quella simbolica, in quanto questo popolo pur sviluppando ottimi procedimenti ed avendo grande abilità e tecnica non si preoccupò mai di giustificare le regole impiegate. L’Algebra indiana si inserisce quindi nella seconda fase.

Gli Indiani usavano per lo più questa disciplina per risolvere problemi commerciali e di conteggio.

Brahmegupta, per esempio, nel suo trattato di Astronomia spiega alcune regole pratiche che corrispondono a quelle attuali dell’addizione di numeri

negativi: “La somma di due crediti è un credito, quella di due debiti un debito, quella di un credito e di un debito è la loro differenza, o, se sono uguali, zero. ...se si deve sottrarre un credito da un debito o un debito da un credito se ne fa la somma”.

Gli Arabi (Cfr. [9])

All’inizio del IX sec. la città di Baghdad divenne un centro di attività per lo sviluppo scientifico. Gli Arabi, avendo raccolto molti dei testi di Algebra greci ed indiani studiarono ed assimilarono i procedimenti di calcolo proposti da questi popoli. Il grande sviluppo culturale e scientifico raggiunse uno dei suoi momenti culminanti durante il califfato di al-Mamun (809-833) con la fondazione della “Casa del Sapere”.

Fra i tanti membri che ne facevano parte c’era il matematico ed astronomo Mohammed Ibn-Musa al-Khwarizmi (foto a lato).



Questo scienziato scrisse più di una dozzina di opere di astronomia e di matematica, le più antiche delle quali erano probabilmente di derivazione indiana.

Il titolo della sua opera più importante “Al-jabr wa’l muqabalah” ha fornito nelle lingue moderne il termine “algebra”.

C’è da sottolineare però che, se da un lato c’è stato un certo progresso, da un altro punto di vista questo popolo fece un grande passo indietro sia al livello

dell'Aritmetica (pur conoscendo dagli Indiani i numeri negativi, li rifiutarono) che dell'Algebra.

Non si riscontrano infatti testi che mostrino l'utilizzo di abbreviazioni o di simboli per nominare l'incognita. Un passo indietro, quindi, sia rispetto all'Algebra indiana che a quella di Diofanto.

Gli Arabi, inoltre, influenzati dai Greci, sentirono la necessità di spiegare e giustificare i procedimenti utilizzati per risolvere i problemi algebrici, ma si servivano per questo scopo soltanto della Geometria. Come il popolo greco, infatti, sentivano di dover giustificare tutto geometricamente.

L'Algebra in Europa fino al 500 (Cfr.[9], [14])

Durante tutto il periodo altomedievale (dal 400 al 1100 circa), la civiltà europea non si preoccupò per nulla dello sviluppo della Matematica; non vi furono tentativi seri di generare nuove conoscenze e quindi nessun progresso.

Tutti i problemi affrontati richiedevano soltanto l'uso delle quattro operazioni fra numeri interi ed erano risolti con l'ausilio del solo abaco. Si utilizzava il sistema di numerazione romano, evitando lo zero di cui non si capiva il senso. Le frazioni venivano usate raramente ed i numeri irrazionali non comparivano affatto.(Cfr. [14] pag. 237-239). Una situazione del tutto stagnante.

Intorno al 1100 però una nuova voglia di sapere "invase" gli studiosi di quel tempo che si interessarono nuovamente alla Matematica approfondendo i loro studi.

Uno degli studiosi che si mise in luce in quel periodo fu sicuramente Leonardo Pisano, detto Fibonacci. L'Algebra di Fibonacci, come quella di Diofanto (che certamente egli conobbe attraverso gli scritti arabi), utilizzava il linguaggio naturale anche se non mancavano abbreviazioni per esprimere l'incognita presente nei vari problemi affrontati.

Le differenze fra i due autori sono però evidenti dal punto di vista del metodo: mentre, infatti, nell'“Arithmetica” di Diofanto, come si è già osservato in precedenza, non si utilizzano completamente le rappresentazioni geometriche per le proposizioni, Fibonacci fa uso della numerazione di posizione e del metodo euclideo della rappresentazione lineare dei numeri. È per questo motivo che la sua viene considerata una “Algebra geometrica” (Cfr. [22] pag.31).

A partire dal secolo XIII le scoperte più importanti che si fecero in Matematica si ebbero principalmente nel campo dell'Aritmetica e dell'Algebra.

In base ai risultati storici, possiamo affermare che molti studiosi dedicarono sempre maggiore interesse a questa materia, cercando di approfondire i loro studi. Si ritrovano diversi testi dedicati a questa disciplina.

In questi scritti, chiamati “trattati d'abaco”, l'Algebra aveva una base aritmetica piuttosto che geometrica e molte delle questioni affrontate venivano risolte con l'ausilio delle equazioni. Un classico trattato d'abaco è il “Trattato d'Algebra” scritto alla fine del XIV sec. da un anonimo fiorentino. Un testo non elementare nel quale vengono trattati molti argomenti mercantili (che

caratterizzano questo tipo di lavori) proposti non soltanto per una finalità pratica, bensì affrontati in maniera più complessa ed astratta.

Franci e Pancanti, due autorevoli studiosi contemporanei, ritengono che quest'opera sia uno dei migliori trattati d'abaco medievali e del Rinascimento che essi abbiano esaminato. In particolare segnalano che “ ... i capitoli finali dedicati all'Algebra ... sono fondamentali nella ricostruzione della storia di questa disciplina nei secoli XIII e XIV... “(Cfr.[21] pag.6)

Aperto una parentesi mi sembra utile, per analizzare anche se molto rapidamente l'evoluzione dei concetti in Algebra, ricordare che in quest'opera, come in altre ritrovate dello stesso periodo, il concetto di numero negativo viene presentato come un ostacolo, qualcosa da evitare, per esempio per la risoluzione delle equazioni algebriche.

Viene ereditata, quindi, la tradizione araba per cui si eliminano i numeri negativi per la formulazione dei concetti. S'intuisce l'importanza che questi numeri possono avere in Matematica, e quindi in Algebra in particolare, ma si guarda al segno “-“ con diffidenza.

Ancora una volta, si deve comunque da sottolineare che lo sviluppo dell'Algebra alla fine del XV sec. era saldamente legato alla necessità di risolvere problemi relativi all'astronomia e all'attività commerciale, sempre più ampia.

Come si può osservare dall'analisi fino ad ora condotta, i simboli più comunemente usati nei testi di Algebra erano frutto di abbreviazioni di parole

comuni, di “pezzi” di vocaboli che nominavano l’incognita del problema. Ciò che si era costruita, sino al 500, era un’Algebra lenta e poco precisa.

Le richieste sempre crescenti della scienza, portarono, negli anni, gli studiosi ad apportare molte variazioni; i matematici si sentirono sempre più stimolati ad usare una notazione simbolica che fornisse loro più velocità e precisione e cominciarono così a capire quello che il simbolismo poteva significare per l’Algebra.

Le prime nuove abbreviazioni che furono utilizzate nel XV sec. furono: p (per più), m (per meno), ae (per uguale). I segni + e – vennero introdotti da Leonardo da Vinci. Il segno = fu introdotto nel 1557 da Recorde che scrisse il primo trattato inglese di Algebra. Per indicare l’uguaglianza, inoltre, vennero introdotti, da Viete il simbolo ~ e da Descartes la lettera a (per aequalis). Il segno del prodotto è dovuto invece a Oughtred mentre i segni > e < furono introdotti da Harriot. Le parentesi tonde compaiono nel 1544, le parentesi quadre e graffe risalgono invece al 1593. Le radici quadrate e quelle cubiche compaiono solo nel XVII sec. con Descartes.

I simboli per le incognite e le loro potenze si evolsero anch’essi ma con lentezza e grande difficoltà.

Gli algebristi del Cinquecento utilizzavano le parole *radix*, *res*, *cosa* o *tanto* per denotare l’incognita ed i simboli generalmente derivavano da altre abbreviazioni.

Gli esponenti vennero introdotti gradualmente negli anni.

Ricordiamo, per esempio, il metodo dello studioso Bombelli: egli per esprimere l'incognita x , la sua potenza x^2 oppure x^3 usava scrivere un semicerchio con sopra il numero 1, il 2, il 3 e così via per tutte le potenze di x .

I cambiamenti effettuati nella costruzione del linguaggio algebrico sono stati, quindi, molteplici e significativi anche se c'è da dire che spesso i nuovi simboli non vennero adottati in modo immediato dai matematici; l'Algebra sincopata non venne certo soppiantata immediatamente da quella simbolica. Il superamento fu lento ed intermittente.

Il primo matematico che usò sistematicamente le lettere fu Vietè. Egli non usava il simbolismo per indicare soltanto l'incognita ma ricorreva alle lettere anche per visualizzare termini generici che occorreva esprimere.

Il suo “nuovo” linguaggio non era stato creato per risolvere soltanto problemi di calcolo algebrico ma veniva applicato per provare diverse regole generali. Nell'evoluzione del linguaggio algebrico questo fu il cambiamento più significativo.

L'Algebra entra, allora, con Vietè, in una nuova fase, la terza, che abbiamo chiamato: fase simbolica.

1.1.3 III FASE

Bombelli-Vietè (Cfr. [9])

Con Bombelli l'Algebra fa un salto di qualità, un grande passo avanti nell'uso del simbolismo.

Egli, nell'opera "L'Algebra" scritta intorno al 1550 e pubblicata nel 1579, introdusse un nuovo linguaggio simbolico, un linguaggio "Sincopato-Avanzato".

Affrontando diversi problemi algebrici come lo studio dei polinomi e la risoluzione di equazioni algebriche, definiva

l'incognita e le sue potenze con i termini "Tanto" e "Dignità" e utilizzava dei simboli speciali per la loro rappresentazione.

Per esprimere l'incognita x , e le sue potenze egli usava infatti scrivere, come ho già accennato, un semicerchio sul quale veniva indicato il numero che denotava l'esponente della potenza.

Questo rappresentava un grande passo avanti nell'uso del linguaggio simbolico in quanto, come ho già osservato precedentemente, la maggioranza dei cambiamenti di notazione apportati fino a quel momento erano essenzialmente soltanto abbreviazioni del linguaggio naturale. Con questo nuovo "metodo" si ebbe un'astrazione più "forte", un maggiore distacco dal linguaggio "reale":

È importante sottolineare che questo simbolismo "Sincopato-Avanzato", creato da Bombelli, condivide con l'Algebra simbolica di Vietè la caratteristica di auto-spiegazione; nonostante tale linguaggio non sia per nulla autosufficiente in quanto bisogna sempre ricondursi al linguaggio naturale e quello geometrico

L'ALGEBRA OPERA

Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Divisa in tre Libri.

*Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta
cognitione della teoria dell'Arithmetica.*

Con vna Tavola copiosa delle materie, che
in ella si contengono.

*Posta hora in luce à beneficio della Studijs di
ditta professione.*



IN BOLOGNA,
Per Giovanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

(certamente semanticamente più ricchi) ha la caratteristica importante di auto-spiegarsi.

Fra il 500 ed il 600 vennero introdotti in modo graduale quasi tutti i simboli conosciuti attualmente.

Un aspetto molto importante che voglio sottolineare, trattando lo sviluppo dell'Algebra e quindi del linguaggio simbolico, è la tendenza alla generalizzazione dei problemi affrontati. Facendo un parallelismo tra le tre opere che a mio avviso segnano delle tappe fondamentali nell'evoluzione di questa disciplina: il "Liber Quadratorum" (Pisano), il "Trattato d'Algebra" (anonimo fiorentino) ed "L'Algebra" (Bombelli) si riscontra una sempre maggiore consapevolezza della necessità di generalizzare tutti i processi di risoluzione ricreati e la possibilità quindi di applicare le tecniche di risoluzione ad una diversità di casi specifici.

L'Algebra diventava, quindi, lo studio dei tipi generali di problemi; tutto ciò che si poteva applicare al caso generale lo si poteva utilizzare per gli infiniti casi particolari.

Fino a questo momento, l'Algebra veniva considerata come "Aritmetica universale" cioè una disciplina capace di esprimere in maniera più generale tutte le regole valide per le operazioni aritmetiche.

Bisognava, però, liberarla; renderla meno limitata.

Secondo questa nuova visione, la variabile, concetto fondamentale per il pensiero algebrico, non poteva più essere considerata come un numero generalizzato; bisognava “svuotarla” di ogni significato esterno.

Come il resto del percorso evolutivo anche questa fase è stata però molto lenta e difficoltosa. Tanti matematici si sono adoperati per “sganciare” completamente l’Algebra dall’Aritmetica.

L’Algebra, una volta liberata da ogni semantica esterna, ha proseguito il suo cammino verso la creazione di oggetti matematici sempre più astratti, nel filone della cosiddetta matematica pura, che nasce a metà del secolo scorso.

“Sicuramente si è molto lontani dalla visione della Matematica come ancella delle scienze naturali: ora appare solo regina delle proprie costruzioni.” (Cfr. [1] pag.21)

1.1.4 Qual è il ruolo dell’Algebra nel nostro paradigma

tecnologico? (Cfr.[1], [4]).

Per concludere il quadro storico mi sembra interessante considerare il ruolo che questa disciplina riveste ai nostri tempi. Come può essa inserirsi in un’era del tutto computerizzata?

È stato osservato che l’avvento del computer ha segnato un cambiamento notevole in questa disciplina. In Informatica, come osserva Usiskin (Cfr. [11]), l’Algebra usa un cast differente da quello usato in Matematica. Dal punto di

vista informatico, il nome di una variabile può essere pensato come indirizzo di un certo specifico registro di memoria, ed il valore della variabile come il contenuto del registro di memoria. (Cfr. [4]).

Queste considerazioni impongono, allora, un esame attento dei problemi legati all'apprendimento dell'Algebra come linguaggio. Problemi che affondano le radici nei primi livelli di scolarità, nel rapporto dialettico tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico, tra semantica e sintassi, tra procedure e relazioni.

È necessario, quindi, che gli allievi apprezzino le potenzialità del linguaggio algebrico e lo applichino secondo un uso "intelligente".

Volendo rispondere alla domanda posta all'inizio di questo lavoro: **“Cosa si intende per pensiero algebrico?”** si può, avendo tracciato, in una prima approssimazione, un percorso di formazione di questa disciplina, dire che il pensiero algebrico è qualche cosa di astratto, inscindibile dal linguaggio con cui si esprime.

Tuttavia è molto limitativo pensare che esso si riduca soltanto a questo; se fosse così tutto si semplificherebbe ad una serie di manipolazioni. Per capire meglio in cosa consiste e come si articola il pensiero algebrico mi è stato molto utile il testo: “L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teoriche e considerazioni didattiche.” dei prof. Arzarello, Bazzini e Chiappini (Cfr. [1]) in quanto in questo articolo viene descritto in maniera estremamente chiara e semplice il “luogo” in cui nasce e vive il pensiero algebrico.

Secondo gli Autori, l'ambiente, peraltro molto particolare, in cui prendono vita i processi di pensiero algebrico è uno spazio caratterizzato da un continuo equilibrio tra opposte polarità. Facendo un paragone, forse un po' "azzardato" ma abbastanza esplicativo, si potrebbe immaginare come un campo elettrico in cui le cariche presenti si attraggono e si respingono continuamente in un bilanciamento costante che si arresterà soltanto nel momento dell'equilibrio.

Ciascuna coppia di polarità, presa in esame dagli autori, individua una dimensione, essenziale per descrivere il pensiero algebrico cosicché graficamente abbiamo un modello a 3 dimensioni costruito sugli assi X, Y, Z.

Analizziamo più da vicino questo modello.

- Asse X: LINGUAGGIO NATURALE-LINGUAGGIO SIMBOLICO

Questa è una dimensione in cui le polarità opposte giocano un ruolo essenziale in tutti i processi di *messa in segno*³ del sapere matematico.

La traduzione tra i due tipi di linguaggio (la sintassi che bisogna usare per *la messa in formula*⁴ di un problema obbliga a cambiare totalmente i procedimenti risolutivi orali) crea spesso delle difficoltà in quanto il linguaggio Naturale è certamente più ricco e sensibile alle diverse semantiche di quanto non lo sia quello Simbolico.

³ La *messa in segno* è quella procedura che, come si intuisce dal vocabolo, permette di riscrivere l'informazione data con un linguaggio simbolico, attraverso dei segni codificati.

⁴ La *messa in formula* è quella procedura che permette di riscrivere un'informazione data in linguaggio naturale, con una formula Matematica, sintatticamente corretta, che la rappresenti.

- Asse Y: SINTASSI-SEMANTICA

La polarità Sintassi-Semantica è strettamente legata alla precedente.

Nel momento in cui si fa uso soltanto del linguaggio Naturale indubbiamente si ha un ottimo controllo semantico: i processi risolutivi orali garantiscono questo controllo in ogni momento del processo. Non è più così nel momento in cui si passa al linguaggio simbolico. In questo caso, infatti, gli aspetti sintattici del linguaggio simbolico usato divengono essenziali e prevalgono su quelli semantici.

Il rapporto, allora, tra la sintassi del linguaggio algebrico ed i significati coinvolti, risulta un punto chiave per spiegare i tratti salienti del pensiero algebrico.

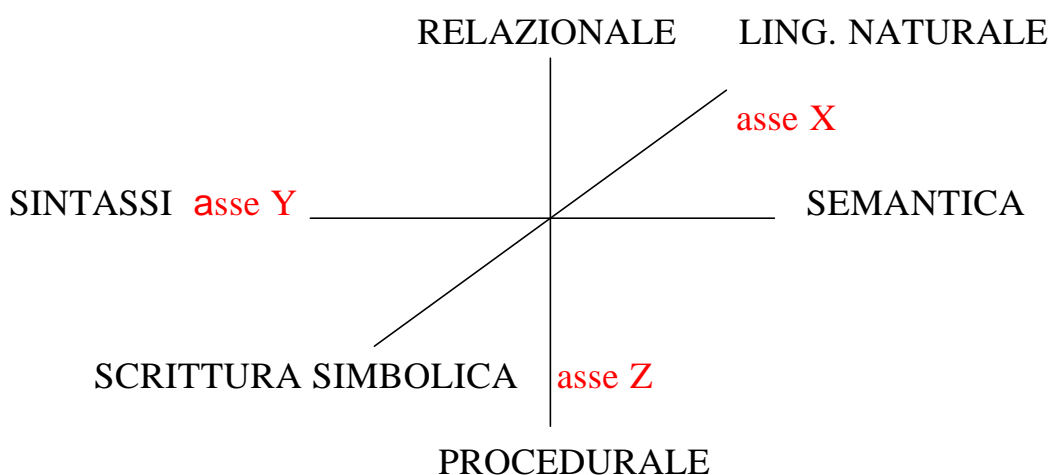
Gli assi X ed Y esplicitano, quindi, lo stesso fattore, anche se in modo differente: il legame tra forma orale e scritta.

- Asse Z: RELAZIONALE-PROCEDURALE

La polarità Relazionale- Procedurale e quindi lo “scontro” continuo tra questi due concetti è stato ampiamente discusso in letteratura ed ha sempre creato non pochi problemi.

La contrapposizione evidenziata permette di sottolineare un aspetto tipico del pensiero algebrico: il brusco passaggio dai calcoli, dai tentativi numerici, alla sintesi di tutto in una formula.

Dopo aver analizzato le tre polarità coinvolte, gli autori del testo considerato, puntualizzano che esiste un altro fattore importante da considerare: una scala di livelli di astrazione che bisogna tener presente per i vari processi. Il pensiero algebrico sarà caratterizzato quindi da un controllo equilibrato di tutte le tre dimensioni ad un livello opportuno di astrazione.



Se ci fosse uno squilibrio da una parte o dall'altra, su qualsiasi asse, X, Y o Z, non si avrebbe vero pensiero algebrico ma solo surrogati più o meno efficienti.

Le tre dimensioni evidenziate dipingono solo lo sfondo in cui si svolgono i processi di pensiero algebrico e non lo caratterizzano in alcun modo. (Cfr. [1]).

Capitolo 2

2.0 Le conoscenze aritmetiche influiscono sullo sviluppo del pensiero algebrico e sulle tecniche risolutive?

Dopo aver analizzato il quadro storico del pensiero algebrico e aver descritto il particolare ambiente nel quale esso si sviluppa, indagherò sul legame tra l'Aritmetica e l'Algebra cercando di approfondire la frase "L'Algebra generalizza l'Aritmetica" riportata nel dizionario Collins (Cfr. [17] pag. 13) e discussa in prima approssimazione nel capitolo precedente.

Che significa generalizza l'Aritmetica?

L'Algebra assume il ruolo di "un'Aritmetica universale"; una scienza delle specie, dei tipi, piuttosto che delle cose stesse. L'Aritmetica, al contrario, è vista come la scienza dei numeri concreti.

Il binomio Aritmetica-Algebra è quindi un concetto fondamentale per lo studio del pensiero algebrico e va approfondito.

Il rapporto fra queste due discipline è sempre stato oggetto di dibattito fra gli studiosi ed ha sempre portato a riflessioni interessanti. Una delle questioni centrali che è stata affrontata è senza dubbio lo studio delle interazioni dell'Aritmetica nell'Algebra, del pensiero aritmetico, quindi, sul pensiero algebrico.

Mi chiedo se le conoscenze aritmetiche influiscano sullo sviluppo del pensiero algebrico, se uno studente sia “inibito” dalle conoscenze aritmetiche (precedenti) nella risoluzione di un problema algebrico.

Lo scopo di questo capitolo sarà, allora, cercare di dare delle risposte a queste domande.

Prima di addentrarmi nell’argomento è fondamentale a mio parere, osservare le differenze sostanziali esistenti fra la Scuola di stampo occidentale e quella orientale. Nelle nostre Scuole, quelle di stampo occidentale quindi, uno studente è portato allo studio dell’Algebra soltanto dopo aver “affrontato” l’Aritmetica. Ecco perché si pone il problema di indagare sulla influenza delle conoscenze aritmetiche su quelle algebriche. Il mio lavoro si baserà esclusivamente su questo tipo di impostazione scolastica.

La Scuola orientale è strutturata in maniera completamente differente. Uno studente cinese o giapponese ha un tipo di “cultura matematica” che non è propria della Scuola occidentale. Il suo modo di procedere nella risoluzione di alcuni problemi algebrici o geometrici è certamente differente dal nostro.

Si è osservato infatti (Cfr. [8] pag.81-91) che l’impostazione mentale, prettamente algebrica, presente negli studenti orientali predilige, nella risoluzione di molti problemi, l’uso dell’Algebra (e quindi l’uso dell’incognita, la messa in formula del testo mediante equazioni ...) piuttosto che dell’Aritmetica.

Uno studente orientale è portato naturalmente a risolvere un problema algebrico o geometrico mediante l'uso dell'Algebra in quanto già nella vita di tutti i giorni è portato a pensare algebricamente. Basta osservare infatti il loro tipo di scrittura per sottolineare l'approccio algebrico alla lingua.

Un esempio particolarmente interessante è la parola che significa maschio o uomo, *nan*, che contiene i radicali di "aratro" e di "campo" e che indica "colui che impiega la sua forza nei campi"

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ナ} & + & \text{田} & = & \text{男} \\
 \text{FORZA} & & \text{CAMPO} & & \text{UOMO}
 \end{array}$$

Abbiamo quindi una specie di equazione: *li+thine=nan*.

Viste, allora, queste naturali differenze fra i due mondi, quello occidentale e quello orientale, e viste le difficoltà dell'argomento assegnato, come ho già sottolineato, mi limiterò, in questo mio lavoro, a considerare soltanto la tradizione occidentale. Farò quindi riferimento alla "nostra" impostazione scolastica.

La prima cosa che ritengo sia fondamentale sottolineare a riguardo è che indubbiamente, secondo me, gli ostacoli incontrati nella crescita di questa disciplina e le difficoltà con cui uno studente ogni giorno si confronta sono strettamente legate. Quello che voglio puntualizzare quindi è che i problemi riscontrati da un qualsiasi alunno che intraprende lo studio dell'Algebra possono

essere molto vicine a quelle provate da tantissimi matematici. Verifiche di questo certo parallelismo continuo fra passato e presente se ne possono trovare diverse. Non c'è, per esempio, da stupirsi se leggendo i risultati di uno studio sperimentale (Cfr. [2], [3]) compiuto su studenti dai 15 a 17 anni in cui si sono indagate le credenze implicite sul significato delle formule simboliche e le loro trasformazioni, è emerso un chiaro orientamento nel vedere una formula soltanto come stringa di simboli arbitrari, governati da regole altrettanto arbitrarie.

Gli studenti in questione, così come tantissimi matematici del passato che hanno dedicato i loro studi all'Algebra, avevano trattato le formule algebriche studiate con estrema rigidità. Per loro, queste non incorporavano nessun significato, se non in se stesse. Le usavano non come strumenti su cui lavorare secondo lo scopo del problema ma come semplici etichette.

Esistono tantissimi esempi di questo tipo e non soltanto sul significato del linguaggio algebrico bensì su tutti i concetti fondamentali dell'Algebra come il ruolo della variabile ed il concetto di equazione.

Riprendendo allora la questione rapporto Aritmetica-Algebra posso affermare che lo studio dell'Algebra deve sì tener conto del terreno naturale su cui essa si è eretta, cioè l'Aritmetica, ma deve andare oltre! Lo studente dovrà vedere l'Algebra "...non come una macchina che gira a vuoto su segni lontani dai referenti semantici dell'Aritmetica, ma piuttosto come generalizzazione e superamento di questa, con tutte le potenzialità che ciò comporta." (Cfr. [1]).

Le conoscenze aritmetiche studiate ed assimilate dallo studente potrebbero, allora, influire, a mio parere, nella risoluzione di problemi algebrici e quindi nelle tecniche adottate per raggiungere il risultato richiesto; influire sia in maniera positiva, spingendo il ragazzo all'astrazione, ma anche in modo del tutto negativo. Un ragazzo, infatti, avendo già studiato ed “usato” l’Aritmetica in più occasioni durante il suo corso di studi di Matematica, potrebbe essere portato, anche inconsciamente, a far uso di queste sue conoscenze ed essere indotto così all’errore.

Varie ricerche hanno messo in evidenza una serie di misconcezioni, che si manifestano negli studenti, dovute proprio allo stretto legame fra queste due discipline matematiche. Ne cito, come esempio, tre:

1) Dato un problema del tipo: “Luca ha ricevuto dal papà in regalo 10 € Ha successivamente comperato un videogioco del costo di 15.60 € Adesso ha 5 € Quanti soldi aveva prima di ricevere il regalo del padre?”

Come risposta ad un quesito del genere è frequente ritrovare soluzioni del tipo:

$$5 \text{ €} + 15.60 \text{ €} = 20.60 \text{ €} - 10 \text{ €} = 10.60 \text{ €}$$

Lo studente per risolvere il quesito decide di sommare al costo del videogioco il resto. Successivamente sottrae, al numero ottenuto, il regalo del padre per ottenere il risultato cercato. Commette però, seguendo il procedimento

risolutivo, un errore: le proprietà simmetrica e transitiva dell'uguaglianza sono state violate.

Il segno = in questo modo perde del tutto il suo significato algebrico intrinseco ed indica soltanto la successione temporale delle operazioni mentali dello scolaro.

2) Un'altra difficoltà sembra derivare dalla diversa valenza che la scrittura di due numeri ha in aritmetica ed in Algebra.

Se in Aritmetica, infatti, l'accostamento di due numeri implica l'addizione

$$25 = 20 + 5$$

in Algebra l'accostamento implica la moltiplicazione

$$4b = 4 * b$$

Il passaggio, quindi, da una scrittura all'altra può creare qualche difficoltà.

3) Difficoltà nell'accettare come soluzione di un problema qualche "oggetto" (ad esempio un'incognita) che non sia un numero⁵.

Lagrange diceva: "Ciò che distingue l'Algebra in modo essenziale dall'Aritmetica...consiste in questo, che il suo oggetto non consiste nel trovare proprio i valori delle quantità cercate, ma il sistema di operazioni da eseguire sulle quantità date per derivarne le quantità cercate, secondo le condizioni del problema.

⁵ Difficoltà presentata da Collis come "Difficoltà nell'accettare la mancanza di chiusura" (Cfr. [12]).

La tabella di queste operazioni è ciò che in Algebra si chiama una formula...; sicché si può definire l'Algebra, l'arte di determinare le incognite attraverso funzioni di quantità note, o che si considerano come tali.”

Il problema è che quella x e quella y (le incognite considerate da Lagrange) che un alunno incontra tanto spesso nel suo cammino tendono a rimanergli del tutto estranee. Cosa sono? Non sono numeri.

Bertrand Russel, ricordando il momento in cui si accostò all'Algebra, scrisse: “Quando si arriva all'Algebra e si deve operare con x ed y , c'è il desiderio naturale di saper cosa sono realmente x ed y . Questo, almeno, era il mio sentimento:

io ho sempre pensato che l'insegnante sapesse che cosa erano x ed y , ma che lei non me lo avrebbe mai detto.”.

Più comodo allora tenerle a distanza, considerarle come semplici segni senza nessun valore intrinseco e vedere cosa accade limitandosi ad usare solo “numeri conosciuti”.

Una serie di misconcezioni di questo tipo non fanno altro che creare una certa frustrazione nell'alunno. Egli imparerà in qualche modo a maneggiare i simboli algebrici e memorizzerà le regole fondamentali ma non apprezzerà mai la loro potenza di calcolo.

Non solo, quindi, in questi casi, non si costruisce conoscenza, ma inoltre un qualsiasi problema algebrico o esercizio esplicativo si dissolve, non lasciando nulla al ragazzo.

Quando, invece, si potrà dire che uno studente, posto di fronte ad un problema matematico, per risolverlo, inizia a pensare algebricamente?

Egli comincerà a pensare in maniera algebrica soltanto nel momento in cui farà un salto di qualità. Dovrà, non solo “distaccarsi” dall’Aritmetica ma, inoltre ricreare in sé quell’ambiente in cui il pensiero algebrico si sviluppa.

Come ho già detto, soltanto ritrovando l’equilibrio fra:

IL LINGUAGGIO NATURALE ED IL LINGUAGGIO SIMBOLICO, LA SINTASSI E LA SEMANTICA, L’ASPETTO RELAZIONALE E PROCEDURALE egli potrà ricorrere al pensiero algebrico “traducendo” un problema dato in un novo ambito.

Cercherò di spiegarmi meglio con un esempio.

Problema: Consideriamo un quadrato magico 3 X 3 (cioè un quadrato tale che la somma dei valori sulle righe, quelli sulle colonne e quelli sulle due diagonali sia sempre costante); assegnati allora tre valori distinti: 4, 5, 7 determinare gli altri in modo che la somma costante sia 21.

	7	
4		5

Il quesito proposto è un classico esercizio che studenti di III Media o IV Ginnasio risolvono facilmente. Il metodo con cui essi procederanno è molto

prevedibile: la prima operazione sarà: $4+7=11$; $21-11=10$; $10+5=15$; $21-15=6$;
 $7+6=13$; $21-13=8$ e così via sino a quando non si determinano tutti i numeri del
 quadrato

9	2	10
8	7	6
4	12	5

Una volta che gli allievi hanno familiarizzato con il metodo di risoluzione, l'insegnante presenta loro un altro quadrato con i numeri 4, 5, 2 e somma costante 10.

	5	
4		2

A questo punto gli studenti, avendo già assimilato la procedura di intervento (soltanto di tipo aritmetico) per questo tipo di esercizi, iniziano a lavorare usando le stesse tecniche risolutive. Faranno allora $4+5=9$; $10-9=1$; $2+1=3$; $10-3=7$; $7+5=12$; $10-12=?$

		1
?	5	7
4		2

C'è qualche errore?

Stupiti per la difficoltà riscontrata provano e riprovano a rifare i conti ma il quadrato non funziona! Si arriva, anche se con qualche dubbio, alla conclusione che il quadrato è impossibile. Tutta la classe accetta questa soluzione e ipotizza l'assegnazione di numeri errati da parte del professore. C'è però una certa frustrazione negli alunni per non aver “dimostrato” l'impossibilità del quadrato. Non si ha nessuna certezza che il risultato trovato sia effettivamente corretto.

Gli studenti hanno pensato algebricamente per risolvere il quesito? No!

Si sono soltanto limitati al calcolo aritmetico, al primo passo!

Non si è riproposto, quindi, l'equilibrio fra le diverse, opposte, polarità. In questo caso infatti si è manifestato uno squilibrio fra l'aspetto procedurale e quello relazionale. È venuto proprio a mancare il passaggio dai calcoli, i tentativi numerici, alla sintesi di tutto in una formula.

Il professore, allora, riscontrando una fase stagnante nella situazione propone ai suoi ragazzi di “usare” l'Algebra per capire meglio cosa sta accadendo. Invita quindi gli studenti al salto di qualità che li porterebbe a pensare algebricamente.

<<Siete convinti che il quadrato non funzioni?>>.

Gli allievi che hanno delle difficoltà nel pensare algebricamente difficilmente avrebbero, da soli, considerato questa nuova strada:

<<L'Aritmetica ha provato che con “certi” numeri l'esercizio non è risolvibile; perché ricorrere all'Algebra?>>.

Con il suggerimento dell'insegnante ed il suo aiuto, gli studenti intraprendono allora un nuovo percorso risolutivo: quello algebrico.

Vengono assegnati tre nomi per le tre caselle conosciute ed un ulteriore nome per la somma data.

Somma = S

	b	
a		c

Lavorando collettivamente si arriva a determinare, senza troppa difficoltà le celle: K3, L1, J1, J2. Il problema viene messo in formula.

	J	K	L
1	S-b-c		S-a-b
2	b+c-a	b	
3	a	S-a-c	c

$$\underline{S-(S-a-b)-c=a+b-c}$$

Si sottrae (S-a-b) e c dalla somma S.

La cella L2 crea qualche difficoltà nei ragazzi.

Dopo molte riflessioni ci si accorge allora che la somma della seconda riga è 3b.

Questo risultato lascia un po' perplessi gli studenti: <<3b cosa rappresenta? Non è un numero!>>.

L'insegnante a questo punto fa notare che se si vuole che la somma sia S allora S deve essere uguale a 3b. La formula ricercata è stata quindi trovata ma è ben lontana dall'essere afferrata dagli studenti. Il professore ricorrerà, quindi, ai valori numerici assegnati per spiegare la soluzione trovata.

<<Se S è uguale a $3b$, poiché a b era stato assegnato il valore 5, $S=15$. Noi però avevamo imposto che S fosse uguale ad 10 quindi ecco provato, con certezza, che il quadrato assegnato non funzionerà mai. È irrisolvibile! Soltanto adesso ne siamo certi!>>.

Esercizi di questo tipo mostrano come effettivamente le conoscenze anteriori (in questo caso puramente aritmetiche) possano influire sulle tecniche risolutive adottate dagli studenti per risolvere problemi che richiederebbero l'uso dell'Algebra ed inibire quindi l'evoluzione del pensiero algebrico.

C'è inoltre da sottolineare che soltanto con un problema del genere, gli studenti possono apprezzare la potenza del simbolismo algebrico ed essere così stimolati ad approfondire le loro conoscenze in questa disciplina. Infatti, solo mediante l'uso dei parametri " S ", " a " e " b " lo studente riuscirà a "leggere" il problema algebricamente e quindi staccarsi dal valore numerico particolare e astrarre il quesito propostogli.

"Rinunciare ai parametri sarebbe, per l'Algebra elementare, rinunciare alla sua essenza" (Cfr. [1] pag. 16).

Capitolo 3

3.0 Analisi sperimentale (analisi a priori e dati raccolti).

Il lavoro che mi propongo di fare adesso, in questo capitolo, è quello di mettere a punto una situazione didattica per testare sperimentalmente il pensiero algebrico.

Nei capitoli precedenti ho puntualizzato che non è facile affermare con certezza se uno scolaro possieda il pensiero algebrico o meno. Per pensare algebricamente, ripeto, egli dovrà ricreare in se stesso l'equilibrio fra le opposte polarità descritte precedentemente ad un livello opportuno di astrazione. Ricostruire questa particolare situazione è abbastanza complesso e richiede da parte del ragazzo molte riflessioni.

È interessante, allora, secondo me, indagare sperimentalmente sul comportamento degli studenti di fronte ad un problema algebrico, evidenziando passo dopo passo i vari ragionamenti fatti per giungere alla soluzione.

Uno scolaro, di fronte ad un quesito matematico, presentato in linguaggio naturale, come si comporterà? Rimarrà a livello aritmetico, usando soltanto il linguaggio proposto ed esprimendo quindi la soluzione “a parole”? Effettuerà, invece, il salto di qualità che lo porterebbe alla *messa in formula* del problema e all'uso, quindi, del linguaggio algebrico, riuscendo a controllare la sintassi della proposizione?

Affrontando, invece, un quesito tipicamente algebrico, sarà più disinvolto nella risoluzione? Quali tipi di errore commetterà?

Il tipo di studio che ho considerato ha alla base l'utilizzo di un test, da me redatto, e presentato a diversi allievi di età compresa fra i 14 ed i 17 anni. Sono stati coinvolti in totale 148 studenti.

Le classi in cui sono state somministrare le prove sono una I Superiore (IV Ginnasio), una II Superiore (V Ginnasio) ed una III Superiore (I Liceo); le scuole scelte per la sperimentazione: il Liceo Classico Garibaldi di Palermo, il Liceo Scientifico Galileo Galilei di Palermo e l'Istituto Tecnico Professionale Pareto di Palermo.

La scelta delle classi è stata effettuata allo scopo di verificare una differenza di verbalizzazione tra gli alunni delle prime classi e quelli che hanno ultimato il biennio. Avendo inoltre scelto tre scuole di indirizzo differente (un Classico, uno Scientifico ed un Istituto Professionale) ho potuto analizzare i diversi approcci all'Algebra nei vari programmi di Matematica.

Il test presenta una serie di problemi algebrici proposti, alcuni in linguaggio naturale altri in linguaggio algebrico.

Si chiede agli studenti di risolvere (in massimo 40 minuti) gli esercizi evidenziandone i vari passaggi.

Il primo tipo di problema è espresso soltanto in linguaggio naturale-aritmetico e presenta quindi una successione di informazioni tipiche di un parlare rapido ed apparentemente semplice.

Il secondo tipo è caratterizzato, invece, da un linguaggio del tutto simbolico. I problemi di questo genere sono per lo più quesiti classici di Algebra come la risoluzione di una espressione algebrica.

Ciò che si vuole evidenziare con il test è, quindi, la capacità, del ragazzo coinvolto, di risolvere un problema in relazione al tipo di scrittura in cui esso è stato dato.

3.1 Analisi a-priori⁴

L'analisi a-priori è uno strumento ben preciso d'investigazione ed ha una duplice valenza:

- di tipo valutativo sul comportamento degli allievi coinvolti
- di tipo disciplinare in relazione ai contenuti.

L'analisi a-priori è del tutto necessaria in questo tipo di lavoro in quanto si ha il bisogno non soltanto di analizzare, più da vicino, il comportamento degli studenti ma anche di rendere più oggettiva la valutazione del test proposto.

Lo scopo principale dell'analisi a-priori è quello di classificare e di riportare tutte le possibili strategie risolutive applicate dagli studenti nel test.

In riferimento a questo mio lavoro quindi, nell'analisi a-priori, dovrò tentare di ritrovare tutti i possibili metodi di risoluzione di un dato quesito presente nel test, corretti e non, al fine di classificare le strategie adottate in pensiero algebrico o aritmetico.

Stilata l'analisi a-priori e somministrato il test, ciò che mi propongo di fare è confrontare i risultati ipotizzati con quelli raccolti dall'analisi sperimentale, tirando le conclusioni finali.

⁴ L'espressione "analisi a-priori" venne usata per prima dalla scuola francese di Didattica delle Matematiche di Brousseau.

Lo studente, posto di fronte ad un quesito del test, risolverà l'esercizio seguendo una strategia ben precisa. La sua tecnica procedurale potrebbe mostrare se egli possiede il pensiero aritmetico e se questo è talmente radicato da vincolarlo nella risoluzione algebrica o se è capace di pensare algebricamente e quindi di ricorrere immediatamente alla messa in formula del testo, risolvendo il quesito in maniera del tutto algebrica. Si potrebbe anche verificare il caso di uno studente che pur sganciandosi dall'Aritmetica e dal solo calcolo non possiede il pensiero algebrico vero e proprio ma si ferma ad uno stadio "intermedio": un pensiero che chiamerò pre-algebrico.

Quesito 1:

Dopo aver letto quel che segue:

Un padre aveva 26 anni alla nascita di suo figlio. Moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si ottiene il numero 456.

Qual è l'età attuale del padre?

E quella del figlio?

Evidenziamo le possibili strategie dividendole in due aree: area aritmetica ed area algebrica.

AREA ARITMETICA (pensiero aritmetico)

Strategia 1:

Il ragazzo, soffermandosi sull'operazione aritmetica della moltiplicazione, esegue una serie di calcoli (moltiplicazione ripetuta):

$27*1$; $28*2$; $29*3$; $30*4$; $31*5$; ; $36*10$; $37*11$; $38*12=456$

Egli parte dal prodotto 27×1 e continua il suo procedimento sino a quando ritrova come risultato della moltiplicazione il numero 456. Il primo fattore rappresenta l'età del padre il secondo, invece quella del figlio. Alla fine, il numero 456 è stato ottenuto dal prodotto dei fattori 38 e 12.

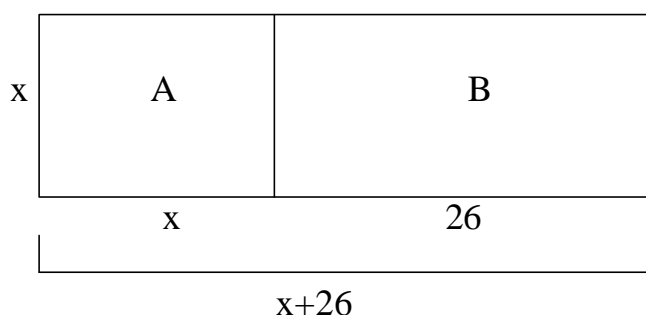
Allora l'età attuale del padre è 38 anni e quella del figlio 12 anni.

Questa strategia presenta quindi solo una serie di operazioni elementari senza alcun simbolismo ed astrazione.

Strategia 2:

Lo studente per risolvere l'esercizio disegna la figura sottostante e decide di lavorare con le aree. Dovrà, per trovare l'incognita x , calcolare l'area del quadrato A (area del quadrato x^2).

Egli sa che l'area totale della figura è 456; quindi, per calcolare l'area del quadrato, deve sottrarre a 456 l'area del rettangolo B (area del rettangolo "base per altezza" quindi in questo caso: $26 * x$)



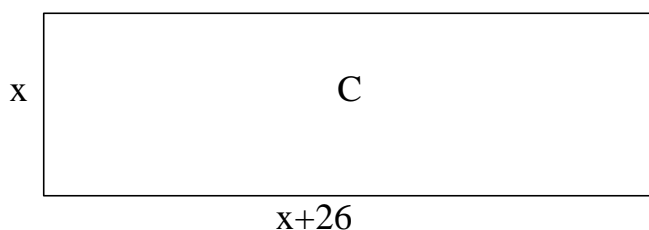
Procede per tentativi calcolando: $456 - (1*(26))$; $456 - (2*(26))$;
 $456 - (3*(26))$; ; $456 - (11*(26))$; $456 - (12*(26))=144=12^2$

Avendo ottenuto un quadrato, il quadrato di 12, è certo che x è 12. Il figlio ha quindi 12 anni mentre il padre ne ha $12+26=38$.

Potremmo classificare questa strategia come Aritmetica-Geometrica. Lo studente per risolvere il quesito, ricorre alla Geometria e successivamente procede per tentativi.

Strategia 3:

La terza strategia ipotizzata è simile alla seconda in quanto si basa anch'essa sul calcolo dell'area, ma in questo caso la figura non viene suddivisa in un rettangolo ed un quadrato ma considerata come un unico grande rettangolo C.



Lo studente che decide di risolvere l'esercizio seguendo questa metodologia, per trovare il risultato, deve calcolare l'area di questa figura (area del rettangolo "base per altezza" quindi in questo caso: $(x+26)*x$)

Lo fa, usando il pensiero aritmetico, procedendo, come nel caso precedente, per tentativi.

$$(1+26)*1 ; (2+26)*2 ; (3+26)*3 ; \dots ; (11+26)*11 ; (12+26)*12=456$$

Giunto al risultato proposto nel testo scopre che il valore incognito della x è 12.

Il figlio ha quindi 12 anni mentre il padre ne ha $12+26 = 38$.

AREA ALGEBRICA (pensiero algebrico)

Strategia 1:

Lo studente, per risolvere il quesito proposto, decide di formalizzarlo in linguaggio algebrico. Sceglie quindi di mettere in formula il problema. Scrive allora l'equazione algebrica che rappresenta il testo dell'esercizio: $(x+26)*x=456$. L'incognita rappresenta l'età del ragazzo. Risolve questa equazione secondo un metodo studiato.

$$\text{Risoluzione: } (x+26)*x=456 \text{ — } x^2+26x-456=0 \text{ — } x_{1,2}=(-13\pm 25) = \begin{cases} 12 \\ -38 \end{cases}$$

Scartando la soluzione $x_2=-38$ in quanto l'età deve necessariamente essere >0 allora, si trova che il ragazzo ha 12 anni mentre il padre $26+12=38$ anni.

Questa strategia evidenzia un certo simbolismo ed una astrazione. L'uso della variabile potrebbe indicare il passaggio dal pensiero puramente aritmetico ad uno pre-algebrico.

Strategia 2:

Lo studente, per risolvere il quesito proposto, decide, anche in questo caso, di formalizzarlo in linguaggio algebrico. Mette allora in formula il problema.

Costruisce, quindi, un sistema che rappresenta il quesito e lo risolve seguendo uno dei metodi appresi.

$$\begin{cases} x-y=26 \\ x*y=456 \end{cases} \quad \text{L'incognita } x \text{ rappresenta l'età del padre, la } y \text{ quella del figlio}$$

Risoluzione :

$$\begin{cases} y=x-26 \\ x*(x-26)=456 \end{cases} \quad \text{risolvendo l'equazione di secondo grado si trovano come soluzioni: } x=38 \text{ ed } x=-12$$

Sostituendo nel sistema ho:

$$\begin{cases} y=38-26=12 \\ x=38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-12-26=-38 \\ x=-12 \end{cases} \quad \text{Da scartare (età negativa)}$$

Allora il ragazzo ha 12 anni mentre il padre ne ha 38.

Questa strategia è quella che effettivamente mostra la capacità dello studente di pensare algebricamente. Seguendo questa metodologia egli effettua una notevole astrazione che lo porta alla messa in formula del problema.

Quesito 2:

Dopo aver letto quel che segue:

Una squadra di calcio ha comprato dei palloni a 25 € l'uno.
Sul prezzo complessivo gli hanno realizzato uno sconto di 10 €
Se la squadra ha pagato in totale 240 € quanti palloni hanno comprato?

Evidenziamo le possibili strategie dividendole in due aree: area aritmetica ed area algebrica.

AREA ARITMETICA (pensiero aritmetico)

Strategia 1:

Lo studente lavora per approssimazioni successive.

$$25*1 ; 25*2 ; 25*3 ; \dots ; 25*8 ; 25*9 ; 25*10=250$$

Giunto a tale risultato, rilegge il testo ed effettua la sottrazione $250-10=240$. questo è il numero proposto nell'esercizio. Si accorge quindi che il numero di palloni ricercato è effettivamente 10. Infatti: $(25\text{€}\cdot 10)-10\text{€}=240\text{€}$

Strategia 2:

Lo studente lavora con una addizione ripetuta.

$$25+25=50; 25+25+25=75; \dots+\dots; 25+25+25+25+25+25+25+25+25+25=250$$

Con lo sconto di 10€ sul prezzo complessivo, la squadra ha potuto comprare 10 palloni.

Strategia 3:

Lo studente lavora con una sottrazione ripetuta.

$$240-25=215 ; 240-25-25=190 ; \dots-\dots ; 240-25-25-25-25-25-25-25-25-25=15$$

Giunto a tale risultato, lo studente riflette sullo sconto.

Con lo sconto di 10€ sul prezzo complessivo, la squadra riesce a comprare un pallone in più, infatti $15€ + \text{lo sconto di } 10€ = 25€$ che è il costo di un pallone. Quindi la squadra, usufruendo dello sconto riesce a comprare in totale 10 palloni.

Strategia 4:

Lo studente risolve l'esercizio lavorando sui concetti di "costo unitario", "costo complessivo" e "sconto".

Considererà allora la formula esclusivamente aritmetica: $(240+10)/25 = 10$. Dividerà quindi il costo totale più lo sconto per il costo unitario dei palloni. Trova così il numero di palloni acquistati dalla squadra.

AREA ALGEBRICA (pensiero algebrico)

Strategia 1:

Lo studente mette in formula il problema e scrive quindi l'espressione:

$25x - 10 = 240$ trova l'incognita x che rappresenta il numero di palloni comprato.

Risoluzione: $25x - 10 = 240 \quad \text{---} x = (240 + 10) / 25 \quad \text{---} x = 250 / 25 = 10$

La squadra di calcio ha comprato 10 palloni.

Strategia 2:

Lo studente, anche in questo caso, mette in formula il problema e scrive una proporzione algebrica, mettendo in evidenza il costo di un pallone ed il costo totale pagato. In formula quindi risulta:

$$25(\text{costo unitario}) : 1(\text{un pallone}) = T (\text{totale pagato}) : X$$

Ma quanto è T? Per calcolare T il ragazzo somma 240,00 € che è la spesa effettiva pagata dalla squadra più lo sconto di 10 € cioè 250 €. Allora avrà:

25(costo unitario) : 1(un pallone) = 250 (totale pagato) : X (numero totale dei palloni)

$$X = (250 * 1) / 25 = 10$$

La squadra ha comprato 10 palloni

Quesito 3:

Dopo aver letto quel che segue:

Trova 3 numeri interi consecutivi tali che la somma dei loro quadrati sia 50

Evidenziamo le possibili strategie dividendole in due aree: area aritmetica ed area algebrica.

AREA ARITMETICA (pensiero aritmetico)

Strategia 1:

Lo studente procede per tentativi successivi.

Prende per prima i numeri 1, 2, 3. Questi sono tre interi positivi consecutivi.

Prova sperimentalmente se il quadrato del primo più il quadrato del secondo più il quadrato del terzo dà effettivamente il risultato richiesto 50.

Si accorge però che $1^2+2^2+3^2=14 \neq 50$.

Ripete allora lo stesso procedimento per 2, 3, 4.

$2^2+3^2+4^2=29 \neq 50$.

Il terzo tentativo potrebbe essere 3, 4, 5.

$3^2+4^2+5^2=50$.

Il ragazzo si accorge di aver trovato il risultato richiesto: 50. I numeri interi consecutivi cercati sono: 3, 4, 5.

Lo studente non si pone il problema di accertarsi se ne possono esistere degli altri: trovati questi si ferma.

Osservazione: Ho ipotizzato che lo studente coinvolto non prenda mai numeri a caso ma proceda con criterio partendo dalla tripla (1, 2, 3) e movendosi passo dopo passo considerando le triple (2, 3, 4) ; (3, 4, 5) e così via.

Strategia 2:

Lo studente segue perfettamente la strategia proposta sopra ma anziché considerare interi positivi consecutivi, sceglie di muoversi a “sinistra” dello zero. Sceglie quindi di ricercare la terna di soluzione tra gli interi negativi consecutivi.

Proverà quindi con la terna: (-3, -2, -1); successivamente con (-4, -3, -2) e così via.

Arriva, quindi, alla terna esatta: (-5, -4, -3) dopo alcuni tentativi.

Anche in questo caso l'allievo difficilmente si chiederà se esistono altri interi consecutivi (positivi o negativi) che verificano l'esercizio.

Strategia 3:

Lo studente segue la prima o la seconda strategia, considerando però i tre numeri consecutivi a caso. Non segue quindi una logica ben precisa nello scegliere la terna richiesta dall'esercizio. Si ipotizza che procedendo in maniera del tutto casuale potrebbe impiegare molto più tempo nel ritrovare la "giusta" terna.

AREA ALGEBRICA (pensiero algebrico)

Strategia 1:

Lo studente mette in formula il problema e scrive quindi l'espressione:

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=50$ Risolve questa con uno dei metodi studiati.

Risoluzione: $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=50$ — $x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=50$ —
 $x^2+2x-15=0$ — $x_{1,2}=(-1\pm 4) = \begin{cases} -5 \\ +3 \end{cases}$

Allora gli interi consecutivi cercati sono:

3, 4, 5 ed -5, -4, -3

Infatti se $x=3$ allora $(x+1)=4$ ed $(x+2)=5$. Se invece $x=-5$ allora $(x+1)=-4$ ed $(x+2)=-3$

Seguendo questa strategia lo studente ha trovato tutte le possibili terne di interi consecutivi che risolvono l'esercizio: (3, 4, 5) ed (-5, -4, -3).

Strategia 2:

Lo studente decide, anche in questo caso, di formalizzare il quesito in linguaggio algebrico. Mette allora in formula il problema.

Costruisce, quindi, un sistema di 3 equazioni in 3 incognite e lo risolve "per sostituzione".

$$\left\{ \begin{array}{l} X^2+Y^2+Z^2=50 \\ Y=X+1 \\ Z=X+2 \end{array} \right.$$

Risoluzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} X^2+Y^2+Z^2=50 \\ Y=X+1 \\ Z=X+2 \end{array} \right.$$

risolvendo secondo il metodo della sostituzione si perviene al seguente sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^2+(X+1)^2+(X+2)^2=50 \\ Y=X+1 \\ Z=X+2 \end{array} \right.$$

Risolvendo l'equazione di 2° grado si trovano come soluzioni: $X=3$ ed $X=-5$

allora i tre numeri cercati saranno 3, 4, 5 ed -5, -4, -3

Infatti se $X=3$ allora $Y=4$ ed $Z=5$. Se invece $X=-5$ allora $Y=-4$ ed $Z=-3$

Anche seguendo questa strategia lo studente ha trovato tutte le possibili terne di interi consecutivi che risolvono l'esercizio: (3, 4, 5) ed (-5, -4, -3).

Quesito 4:

Dopo aver letto quel che segue:

È vero che se ad un numero intero si somma 4 e poi si moltiplica per 80 si ottiene 2.360 ?

Evidenziamo le possibili strategie dividendole in due aree: area aritmetica ed area algebrica.

AREA ARITMETICA (pensiero aritmetico)

Strategia 1:

Lo studente decide di lavorare per approssimazioni successive.

Partendo dal numero 1 esegue le operazioni descritte nel testo del problema: somma $1+4$, successivamente moltiplica il risultato ottenuto per 80 e verifica se il numero così ottenuto è effettivamente quello richiesto dall'esercizio. Se ha ottenuto, allora, 2.360 si ferma e mostra l'incognita richiesta, altrimenti esegue il passo successivo considerando un numero più grande di 1.

Lavorerà, quindi, allo stesso modo per 2, per 10, per 15, per 20, per 25; ottenendo però numeri sempre più piccoli di 2.360.

Suppongo allora che egli prenda in considerazione il numero 26.

Per il numero 26 si ha seguente situazione:

$$26+4=30; 30*80=2.400. \text{ Ma } 2.400 > 2.360.$$

Per 25 si ottiene, quindi, il numero 2.320; per 26, invece, il numero 2.400.

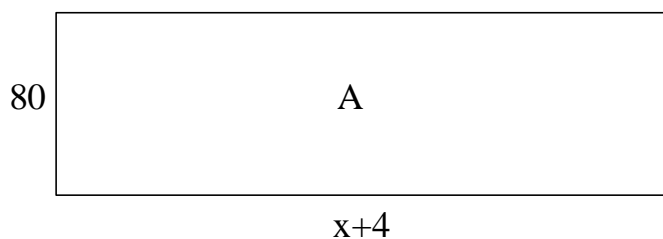
Poiché, tra i due numeri considerati non ci sono altri interi, non è certamente vero che se ad un numero intero si somma 4 e poi si moltiplica per 80 si ottiene 2.360. Tale intero non esiste.

Osservazione:

Il passaggio chiave di tale strategia consiste nell'esaminare, considerando i vari casi numerici, la situazione relativa al numero 25 ed al numero 26. Solo mediante tale passo si può dimostrare la non esistenza di un intero che ha la proprietà descritta nel testo del quesito.

Strategia 2:

Un'altra strategia che lo studente può usare per risolvere l'esercizio è quella di disegnare un rettangolo e lavorare con le aree.



Lo studente che risolve l'esercizio seguendo questa metodologia, per trovare il risultato, deve calcolare, in base all'area di questo rettangolo, quanto misura effettivamente la base. L'area del rettangolo è uguale ad 2.360.

Lo fa, usando il pensiero aritmetico, procedendo, come nel caso precedente, per tentativi:

$(1+4)*80$; $(2+4)*80$; $(3+4)*80$; ; $(24+4)*80$; $(25+4)*80=2.320$;
 $(26+4)*80=2.400 > 2.360$.

Giunto a questo risultato si rende conto che il numero 2.360 non lo si potrà mai ottenere considerando un intero. L'incognita dovrà necessariamente essere un numero "con la virgola" tra 25 e 26.

AREA ALGEBRICA (pensiero algebrico)

Strategia 1:

Lo studente mette in formula il problema e scrive quindi l'espressione:

$$(x+4)*80=2.360$$

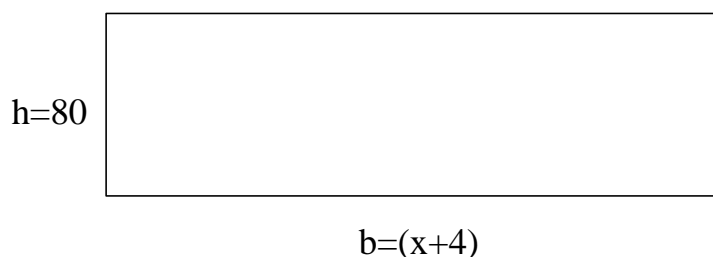
$$\text{Risoluzione: } 80x+320=2.360 \quad \text{————} \quad 80x=2.360-320=2.040 \quad \text{——}$$

$$x=2.040/80=25.5$$

Ma 25.5 non è un numero intero. Allora non esiste un intero che ha la proprietà descritta nel testo del quesito.

Strategia 2:

La seconda strategia possibile consiste nel disegnare un rettangolo di base $(x+4)$ ed altezza 80. Lo studente, per risolvere il problema proposto, decide di impostare la seguente equazione: $2.360= b*h$



Risolve quindi l'equazione: $2.360=(x+4)*80$ ed arriva alle stesse conclusioni ottenute considerando la strategia 1.

Quesito 5:

Risolvi la seguente espressione algebrica:

$$2x(x-10) + 5(3x^2-4x) = 5x(3x-4) - 2x(4x-5)$$

Quesito 6:

Risolvi la seguente espressione algebrica:

$$x^2/4 = x/32$$

Osservazione: questo tipo di quesiti è caratterizzato, a differenza dei precedenti, da un linguaggio del tutto simbolico. I due esercizi presentati sono due esercizi classici di Algebra come la risoluzione di una espressione algebrica. Questi sono stati inseriti nel test e proposti, quindi, agli studenti, con lo scopo di verificare se essi, davanti ad un esercizio puramente algebrico, espresso in un linguaggio del tutto formalizzato, si dimostrano, nella risoluzione, più abili e disinvolti che negli altri precedenti, dati in linguaggio non formalizzato.

È molto provabile, a mio parere, che uno studente, letta l'espressione algebrica, riportata nel testo dei quesiti 5 ed 6, si metta a risolverla meccanicamente effettuando i vari passaggi in maniera del tutto autonoma.

Evidenziamo allora, come per i quesiti precedenti, le possibili strategie risolutive, dividendole in due aree: area aritmetica ed area algebrica.

AREA ARITMETICA (pensiero aritmetico)

Strategia 1:

Lo studente, letta l'espressione algebrica, sceglie di risolverla (trovare il valore dell'incognita x) per approssimazioni successive sulla variabile x , presente nell'equazione. Per il quesito 5: << Se x è uguale ad 1, avrò:

$$2*(-9)+5*(-1)=5*(-1)-2*(-1) \text{ e cioè: } -18-5=-5+2$$

L'uguaglianza non è verificata. Allora provo per 2 ... >>.

Lo studente, lavorando in questo modo, eseguirà parecchi calcoli ed impiegherà molto tempo prima di ritrovare l'uguaglianza cercata.

Lo stesso tipo di procedimento si può ipotizzare per il quesito 6. In questo caso però il ragazzo difficilmente risolverà l'equazione proposta in quanto, a differenza dell'esercizio precedente che aveva come soluzioni $x=0$ ed $x=3$, stavolta le soluzioni sono $x=0$ ed $x=1/8$. È poco provabile, infatti, che uno studente prenda in considerazione, per i suoi "tentativi" il numero $1/8 = 0,125$.

AREA ALGEBRICA (pensiero algebrico)

Strategia 1:

Lo studente, letta l'espressione algebrica, la riscrive e la risolve con un metodo studiato:

Quesito 5:

$$\text{Risoluzione: } 2x(x-10) + 5(3x^2-4x) = 5x(3x-4) - 2x(4x-5) \quad \text{—————}$$

$$2x^2-20x+15x^2-20x=15x^2-20x-8x^2+10x \quad \text{—————}$$

$$2x^2 - 20x + 15x^2 - 20x - 15x^2 + 20x + 8x^2 - 10x \quad \text{—————}$$

$$10x^2 - 30x = 0 \quad \text{—————}$$

$$10x(x-3) = 0 \quad \text{—————}$$

$$x=0 \quad \text{ed} \quad x=3$$

Quesito 6:

Strategia 1:

$$\text{Risoluzione 1: } x^2/4 = x/32 \quad \text{——} \quad x^2/4 - x/32 = 0 \quad \text{——} \quad (8x^2 - x)/32 = 0 \quad \text{——}$$

$$8x^2 - x = 0 \quad \text{——} \quad x(8x - 1) = 0 \quad \text{——} \quad x = 0 \quad \text{ed} \quad x = 1/8$$

$$\text{Risoluzione 2: } x^2/4 = x/32 \quad \text{——} \quad \text{divide per } x \text{ (quindi considera la soluzione } x=0)$$

$$x/4 = 1/32 \quad \text{——} \quad 8x = 1 \quad \text{——} \quad x = 1/8 \quad \text{soluzioni } x=0 \quad \text{ed} \quad x=1/8$$

Strategia 2:

Risoluzione: Lo studente non si ferma ad “osservare” l’equazione $x^2/4 - x/32 = 0$ ma la risolve meccanicamente, non ragionando su di essa, calcolando il Delta e trovando le due soluzioni.

Quesito 7:

Traduci in formule, usando le variabili S (per il numero degli studenti) ed P (per il numero dei professori) l’enunciato:

<<in questa scuola gli studenti sono sei volte i professori>>

Evidenziamo le possibili strategie dividendole in due aree: area aritmetica ed area algebrica.

AREA ARITMETICA (pensiero aritmetico)

Strategia 1:

Lo studente decide di lavorare per approssimazioni successive sviluppando dei casi particolari. Egli, allora, seguirà questo procedimento mentale: << Se i professori sono 10, quanti sono gli studenti? Poiché gli studenti devono essere 6 volte i professori allora saranno $6*10=60$. Se poi i professori sono, per esempio, 20; allora, in questo caso, i professori saranno $6*20=120$ >>.

Facendo diversi esempi come questo, il ragazzo può astrarre il caso particolare ed arrivare così alla formula: $S_{(studenti)} = 6 * P_{(professori)}$

AREA ALGEBRICA (pensiero algebrico)

Strategia 1:

Lo studente, letto l'enunciato del quesito, mette in formula il problema e quindi, usando le variabili P ed S, scrive subito l'espressione algebrica:

$$S = 6 * P .$$

N.B.

Nel riportare i dati relativi alla sperimentazione (Allegato 1), per ogni strategia ipotizzata, ho considerato due sotto colonne: colonna A e colonna B che

mostrano se lo studente in questione ha, seguendo quel determinato metodo di risoluzione, svolto il quesito (colonna A) oppure (colonna B) se non lo ha risolto completamente e quindi non ha raggiunto il risultato richiesto o se ha commesso degli errori di calcolo.

3.2 Analisi dei dati raccolti.

In quest'ultima parte del lavoro di tesi ciò che mi propongo di fare è analizzare i dati raccolti con la somministrazione del test, confrontare le varie strategie adottate dagli studenti interpellati con quelle da me ipotizzate nell'analisi a-priori ed infine riportare alcuni risultati importanti.

Tutti i ragazzi si sono dimostrati interessati e si sono impegnati per risolvere al meglio il compito assegnato. Ho raccomandato loro non tanto di scrivere il risultato del quesito bensì di prestare maggiore attenzione al procedimento usato per arrivare alla soluzione. In questo modo ho potuto controllare la strategia eseguita e quindi classificarla.

Sono stato costretto a considerare non valide le risposte che non riportavano il procedimento seguito. Come avrei dovuto infatti classificarle? Lo studente che ragionamento ha seguito per arrivare a quella soluzione?

Come ho già detto in precedenza ho somministrato il test in tre diverse scuole di Palermo: un Liceo Classico, un Liceo Scientifico ed un Istituto Professionale.

La domanda che mi sono posto prima di analizzare i test e studiarne le varie strategie è stata quella di chiedermi quando si comincia a fare Algebra nelle scuole. Tutti i ragazzi del I Superiore (IV Ginnasio), II Superiore (V Ginnasio) e III Superiore (I Liceo), da me interpellati, erano in grado di rispondere ai quesiti proposti nel test?

La tradizione didattica collocava l'Algebra in terza media, quando si affrontava lo studio dei numeri relativi, delle equazioni e la manipolazione di espressioni simboliche. È ormai però opinione diffusa che le basi del pensiero algebrico si pongono fin dalla scuola elementare quando si comincia ad operare sui numeri. Logicamente in questa fase l'attenzione dell'alunno è completamente concentrata sul singolo problema o sulla particolare operazione ma, attraverso varie attività si può portare l'alunno a riflettere non solo sul risultato ma sul processo. Dunque si comincia a fare Algebra quando si fa Aritmetica.

Le occasioni per fare pre-Algebra alle scuole medie sono svariate: permettono di avviare all'uso corretto delle variabili e consentono di intraprendere il discorso sulla funzione di generalizzazione propria del linguaggio algebrico quindi la messa in formula di un esercizio e l'uso di un linguaggio del tutto astratto.

La I Superiore (IV Ginnasio, per il Liceo Classico) può essere dunque il momento in cui l'alunno, riflettendo con una diversa maturità su cose già studiate negli anni precedenti, le comprende meglio, le generalizza, le unifica ed impara a chiamarle con un linguaggio più appropriato. Crescendo imparerà sempre nuove nozioni riuscendo inoltre a comprendere meglio i risultati ottenuti negli anni precedenti.

Per facilitare la consultazione dei risultati ottenuti nella sperimentazione, ho preferito aggiungere nelle varie tabelle, costruite con il foglio elettronico Excel, dei grafici a barre che mostrano in maniera del tutto intuitiva la “prevalenza” del pensiero algebrico su quello aritmetico o viceversa.

Le strategie individuate nell’analisi a-priori si sono dimostrate valide ed esaustive in quanto i comportamenti ipotizzati si sono verificati. Le uniche strategie ipotizzate non riscontrate nell’analisi sperimentale sono state quelle Aritmetiche-Geometriche. Nessuno degli studenti ha infatti “usato” la geometria per la risoluzione dei quesiti.

Analizziamo adesso più da vicino alcuni dei risultati più importanti.

3.2.1 Dati sperimentali: IV Ginnasio (Liceo Classico Garibaldi), I Liceo (Liceo Scientifico Galileo Galilei) e I Liceo (I.T.C. Pareto).

Analizzando le tabelle riferite al 1° quesito e confrontando la colonna relativa al pensiero aritmetico con quella del pensiero algebrico la prima cosa che si nota è che soltanto un ragazzo (Compito n.9) su 25 al Liceo Classico Garibaldi è riuscito a risolvere il problema (seguendo la strategia aritmetica 1).

Altri suoi compagni hanno cercato di risolvere l’esercizio, seguendo la stessa strategia, ma non sono arrivati a terminarlo giungendo alla soluzione (Compito

n.10). Nove studenti della stessa classe hanno poi seguito una strategia algebrica ma non sono stati in grado di risolvere l'equazione. Questi infatti hanno solo impostato il problema.

Il pensiero algebrico è sicuramente più visibile al Liceo Scientifico. Parecchi ragazzi, infatti, affrontano il problema dal punto vista algebrico anche se non tutti lavorano correttamente.

Leggendo infine i risultati dell'I.T.C. Pareto risulta che nessuno studente ha usato una strategia algebrica; parecchi invece hanno seguito la strategia aritmetica 1.

In riferimento al 3° quesito mi sembra importante sottolineare poi le difficoltà incontrate dai ragazzi sull'uso dei numeri negativi. Soltanto due studenti del Liceo Classico riescono a lavorare nell'insieme degli Interi e quindi considerare la terna (-5, -4, -3) come soluzione del problema (Compiti n.24, n.25) Il resto della classe considera solo con i numeri Naturali.

Questo comportamento era già stato evidenziato nell'analisi a-priori: avevo, infatti, considerato per i due casi differenti due strategie aritmetiche possibili.

Al Liceo Scientifico e all'I.T.C. Pareto nessun ragazzo segue la strategia aritmetica 2.

Si evidenzia quindi in tutti e tre gli indirizzi una difficoltà ad usare i numeri negativi.

Un altro risultato importante si può riscontrare rileggendo i dati relativi al Liceo Scientifico sul 4° quesito. Se mentre al Liceo Classico e all'I.T.C. il

pensiero aritmetico prevale sempre su quello algebrico, al Galileo Galilei quasi l'83% degli studenti risolve l'esercizio seguendo la strategia algebrica 1. Nessuno affronta il problema lavorando per approssimazioni successive. Potremmo quindi essere portati a pensare che gli studenti di questa classe possiedano il pensiero algebrico. In realtà non è così facile concludere con un risultato del genere. Il solo test potrebbe non bastare per giungere a dei risultati verificabili: bisognerebbe fare delle indagini più approfondite, studiando, per esempio, singolarmente ogni studente magari con delle interviste mirate a verificare la sua padronanza di linguaggio e la capacità di astrazione; un lavoro complesso che andrebbe oltre la trattazione della mia tesi.

Relativamente al 5° e 6° quesito mi sembra importante sottolineare la metodologia seguita dai ragazzi del Liceo Classico Garibaldi. Molti di loro, non riuscendo a risolvere l'equazione di 2° grado tentano di verificarla provando per tentativi. (Compiti n.5,15,16). Anche questa strategia era stata ipotizzata da me nell'analisi a-priori (strategia aritmetica 1). Gli studenti del Liceo Scientifico, a differenza dei loro coetanei del Garibaldi si mostrano più disinvolti e più abili nell'affrontare un quesito puramente algebrico. 22 studenti su 23 affrontano il quesito lavorando meccanicamente sull'espressione dell'equazione.

Nel 7° quesito il pensiero algebrico prevale nettamente su quello aritmetico, in tutte e tre le scuole. Soltanto all'I.T.C. Pareto si trovano dei compiti con risoluzioni di tipo aritmetico.

3.2.2 Dati sperimentali: V Ginnasio (Liceo Classico Garibaldi), II Liceo (Liceo Scientifico Galileo Galilei) e II Liceo (I.T.C. Pareto).

Relativamente al 1° quesito, a differenza di ciò che era stato osservato nel paragrafo precedente per il IV Ginnasio del Liceo Classico, quasi tutti gli studenti del V Ginnasio del Liceo Classico risolvono il problema. Soffermandosi infatti sull'operazione aritmetica della moltiplicazione, eseguono una serie di calcoli (moltiplicazione ripetuta) arrivando a determinare il risultato. Seguono quindi la strategia aritmetica 1. La differenza con il Liceo Scientifico è ancora più netta rispetto a ciò che si era evidenziato nella classe precedente: al Galileo Galilei infatti il 64% affronta il problema algebricamente e solo 4 studenti lavorano per approssimazioni successive.

Così come avevo sottolineato nel paragrafo precedente, anche a questo livello scolare si evidenzia una difficoltà ad usare i numeri negativi. C'è da dire però che si riscontra, adesso, una maggiore consapevolezza nei procedimenti algebrici usati. Allo Scientifico ad esempio si ritrovano più procedimenti di stampo puramente algebrico. (Compiti n.1,n.2 relativi al quesito 3)

Relativamente al 6° quesito mi sembra importante puntualizzare che nessuno studente del V Ginnasio del Liceo Classico è riuscito a risolvere l'equazione presentata, né lavorando per approssimazioni successive, né in maniera

algebrica. Nettamente diversa la situazione dello Scientifico e dell' I.T.C. Qui viene del tutto abolito la metodologia per tentativi e si lavora esclusivamente algebricamente.

Che al Liceo Classico gli studenti siano meno tecnici rispetto a quelli che frequentano un Liceo Scientifico o un Istituto Tecnico Commerciale risulta ancora più evidente all'analisi del 5° quesito. Come già detto in precedenza i quesiti n.5 e n.6 sono stati scelti proprio per analizzare il comportamento degli allievi di fronte un esercizio tipicamente algebrico.

Al Liceo Garibaldi nessun ragazzo è riuscito a risolvere l'esercizio. Alcuni hanno provato con una risoluzione algebrica (Compito n.3, n.4), altri hanno invece preferito lavorare per tentativi successivi ma non trovando la soluzione in maniera immediata si sono fermati. Nettamente diversa la situazione negli altri due indirizzi.

Un'altra osservazione importante che risulta dal test, viene evidenziata dal 7° quesito. Negli indirizzi più tecnici come l'I.T.C. i ragazzi vengono spesso abituati a ragionare meccanicamente. È più facile per loro risolvere un'equazione e quindi affrontare un problema in linguaggio algebrico (lo abbiamo osservato per i quesiti n. 5 e n.6) che mettere in formula un problema espresso inizialmente in linguaggio naturale. Il 7° quesito infatti viene risolto correttamente dal 61% degli studenti del Liceo Classico e soltanto dal 33% dei ragazzi del Pareto. Anche questo risultato era da me atteso in quanto avendo frequentato il Liceo Classico so che con gli studi umanistici propri di questo

indirizzo si è portati a riflettere sui concetti espressi dalle formule piuttosto che lavorare meccanicamente sulle formule.

3.2.3 Dati sperimentali: I Liceo (Liceo Classico Garibaldi), III Liceo (Liceo Scientifico Galileo Galilei) e III Liceo (I.T.C. Pareto).

Passando ad analizzare i tabulati relativi al I Liceo (Liceo Classico Garibaldi), III Liceo (Liceo Scientifico Galileo Galilei) e III Liceo (I.T.C. Pareto) si evidenzia sempre più una maggiore consapevolezza dei procedimenti algebrici. Risulta, ad esempio, immediato il dato relativo al 1° quesito svolto dai ragazzi del Liceo Garibaldi. Su 5 studenti interpellati, 4 affrontano il problema in maniera puramente algebrica: mettono in formula il problema e risolvono l'equazione.

Il 2° quesito mostra ancora, a questo livello, un predominio del pensiero aritmetico su quello algebrico. È stato forse l'unico quesito che i ragazzi non hanno, quasi mai, impostato algebricamente mettendo in formula il problema.

I quesiti n.5 e n.6 vengono risolti più o meno correttamente da tutti sia al Liceo Classico che al Liceo Scientifico e all'I.T.C. Nessuno degli studenti interpellati lavora più per approssimazioni successive: tutti, letta l'equazione si adoperano per risolverla usando soltanto proprietà algebriche.

L'osservazione più importante nasce, in questo caso dal 7° quesito. Il risultato ottenuto dall'analisi sperimentale è stavolta nettamente discordante con i risultati ritrovati prima, nelle classi precedenti. Se da un lato si nota sempre più, nei ragazzi, una maggiore consapevolezza della potenza dell'Algebra nella risoluzione dei problemi e una maggiore abilità nell'uso del linguaggio algebrico, dall'altro lato, al Liceo Classico Garibaldi, ritrovo un risultato contraddittorio. Si evidenzia infatti che tutti gli studenti del Garibaldi hanno sbagliato, per il 7° quesito, la messa in formula del problema, scrivendo $P=6S$ anziché $S=6P$, invertendo quindi le variabili. Il risultato qui ottenuto è in netta opposizione con quello ritrovato al V Ginnasio. Discutere questo cambiamento non è per nulla facile e può essere dovuto a diversi fattori difficili da controllare. Per concludere l'analisi dei dati raccolti ed avere quindi un quadro generale della sperimentazione è importante, inoltre, fissare l'attenzione sui cambi di strategia. Parecchi ragazzi posti di fronte al quesito presentato nel test, pur decidendo in un primo momento di seguire una determinata strategia risolutiva, successivamente scelgono di cambiare metodologia affrontando il problema in maniera differente.

Si evidenziano allora cambiamenti di strategia relativi all'AREA ARITMETICA (Compiti n.24, n.25, 3° quesito, IV Ginnasio Garibaldi; compiti n.5, n.11, 3° quesito, V Ginnasio Garibaldi; compiti n.4, n.6, n.7, n.11, 3° quesito, II Liceo Pareto), cambi propri dell'AREA ALGEBRICA passando, quindi, da una strategia algebrica ad un'altra anch'essa algebrica, ed infine cambi radicali di

strategie che portano il ragazzo da una metodologia propriamente aritmetica ad una algebrica. A questo proposito particolare interesse ha suscitato in me, il compito di un ragazzo del III Liceo Pareto (Compito n.3) relativamente al 1° quesito. Lo studente affrontando l'esercizio sceglie inizialmente di lavorare per approssimazioni successive e quindi segue la strategia aritmetica 1; soltanto dopo aver trovato la soluzione (i numeri 38 e 12), "volendo verificare" il risultato mette in formula il problema, risolvendo l'equazione: $x^2 - sx + p$ (s=somma, p=prodotto). Questo non è pensiero algebrico vero e proprio, ma potrebbe essere classificato come pensiero pre-algebrico, perché il ragazzo non riesce a sganciarsi immediatamente dall'Aritmetica e generalizzerà il problema solo dopo aver effettuato diversi calcoli

Conclusione

La ricerca da me effettuata ha permesso di evidenziare dei risultati interessanti.

Dall'analisi dei dati raccolti si evince un diverso comportamento degli allievi secondo la struttura logica di un problema. Si è provato che in un ambiente strettamente algebrico i ragazzi del Liceo Scientifico si mostrano più disinvolti e più abili riuscendo quindi a risolvere, per esempio, un'equazione algebrica loro proposta in maniera del tutto autonoma, mostrando una forte padronanza del linguaggio algebrico.

Lo stesso non si può affermare per gli studenti del Liceo Classico e dell'Istituto Tecnico Commerciale. Se, infatti, da una parte, i ragazzi del Liceo Classico mostrano poca dimestichezza con il linguaggio formalizzato e quindi non riescono a lavorare in maniera disinvolta su un problema espresso in linguaggio algebrico, dall'altro lato, i ragazzi dell'Istituto Tecnico Commerciale riescono ad affrontare il problema seguendo una strategia algebrica ma non avendo una forte consapevolezza delle potenzialità del linguaggio si limitano a "sfruttare" l'Algebra.

In un ambiente prettamente aritmetico, dove gli esercizi vengono proposti ai ragazzi in linguaggio naturale, la situazione evidenziata dal test è completamente diversa.

Al Liceo Classico si presenta negli studenti, anche in questo caso, una forte riluttanza al pensiero algebrico: il pensiero aritmetico è fortemente radicato in loro e difficilmente passano in maniera autonoma a considerare il problema seguendo una strategia algebrica. Ciò conferma che il pensiero aritmetico è stato il primo ad essere appreso e rimane un pensiero forte.

Relativamente all'Istituto Tecnico Commerciale, i ragazzi rispetto ai loro coetanei del Liceo Classico mostrano sì una maggior abilità nel tradurre il linguaggio naturale in un linguaggio formalizzato, ma evidenziano delle difficoltà dal punto di vista del metodo.

Infine si è osservato che gli allievi del Liceo Scientifico, posti di fronte ad un problema espresso in linguaggio naturale, lo affrontano inizialmente con strategie prettamente aritmetiche, soprattutto se non sono richiesti parecchi conti; utilizzano invece il pensiero algebrico, mettendo in formula il problema, ogni qualvolta il quesito presenta laboriosi tentativi di calcolo.

Una situazione particolare, quindi, che mostra come al Liceo Scientifico, pur avendo una serie di algoritmi e strategie mirate al pensiero algebrico, lo studente non raggiunge il pensiero algebrico ma si ferma ad uno stadio intermedio: quello che è stato chiamato pensiero pre-algebrico.

Ritengo poi importante sottolineare ancora una volta che, comparando i dati raccolti, relativi alle tre classi, di ogni indirizzo, coinvolte nella sperimentazione, si evidenzia una sempre maggiore consapevolezza da parte degli studenti dei

procedimenti algebrici in virtù del proseguo degli studi matematici e quindi di una maggiore acquisizione di strumenti logici e concettuali.

Se però questo processo è molto evidente al Liceo Scientifico, lo stesso non si può dire per l'Istituto Tecnico Commerciale e per il Liceo Classico.

A causa forse di un numero minore di ore di Matematica negli indirizzi tecnici ed umanistici, il linguaggio algebrico non viene visto dai ragazzi come un modo di espressione ed un linguaggio da usare abitualmente in Matematica.

Questi, infatti, avranno affinato la loro intuizione e iniziato a fare qualche passo avanti sulla via dell'astrazione ma sicuramente non posseggono il pensiero algebrico.

I risultati ottenuti, comunque, non possono definirsi definitivi; vorrò, infatti, proseguire la mia ricerca successivamente migliorando lo strumento d'indagine, costruendo un'analisi a-priori più dettagliata e ampliando il campione di indagine.

Sarebbe inoltre interessante applicare la ricerca ad altre culture ed ad altri linguaggi naturali, ad esempio sui ragazzi cinesi, i quali presentano, come ho già detto in precedenza, un modo di pensare differente dal nostro.

Bibliografia

- [1] F. Arzarello, L. Bazzini, G. Chiappini, L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Progetto strategico del C.N.R.. Tecnologie e innovazioni didattiche, quaderno n.6, 1994, Pavia.
- [2] L. Linchevski, A. Sfard, Rules without reason as processes without objects. The case of equations and inequalities. *Proc. of. PME XV*, 1991, Assisi.
- [3] A. Sfard, L. Linchevski, Equations and inequalities: processes without objects?, *Proc. of. PME XVI*, 1992, New Hampshire, USA.
- [4] G. Chiappini, Acquisizione del concetto di variabile in campo matematico e informatico, *Publ. IMA n.8/90*, 1990, Genova.
- [5] Ministero della Pubblica Istruzione. Direzione Generale Istruzione Classica Scientifica e Magistrale, L'Algebra tra tradizione e rinnovamento. Seminario di formazione per docenti, Liceo Scientifico Statale "A.Vallisneri", Settembre 1994, Lucca.
- [6] Spagnolo Filippo, La dispersione scolastica. Una ipotesi di intervento nell'Istituto Professionale per il Commercio e i Servizi Sociali G. SALVEMINI PALERMO, 1995, Palermo.
- [7] Luciana Bazzini, Atti del V convegno internuclei per la scuola secondaria superiore, La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore, 16-18 Marzo 1995, Pavia.

- [8] Filippo Spagnolo, Sull'impostazione di certi metodi risolutivi dei problemi nella tradizione cinese, Centro Ricerche Ugo Morin, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, Vol. 9 N.8 pag.81-91, 1986, Paderno del Grappa.
- [9] Elsa Melisani, Storia del pensiero algebrico fino al 500. Costruzione del simbolismo e risoluzione di equazioni, G.R.I.M. Quaderni di ricerca in didattica, quaderno n.6, 1996 pag.26-77, Palermo.
- [10] Elsa Melisani, Incidenza di diversi tipi di struttura logica di un problema sulla condotta di risoluzione, G.R.I.M. Quaderni di ricerca in didattica, quaderno n.3, 1992 pag. 65, Palermo.
- [11] Z. Usiskin, Conceptions of school algebra and uses of variables, In Coxford A.F. (ed.), The ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook, NCTM, Reston, Va, 1988.
- [12] Collis K.F., Cognitive development and mathematics learning, Manoscritto presentato a Psychology of Mathematics Workshop, *Centre for Science Education, Chelsea College*, 1974, London.
- [13] R.J. Trudeau, La rivoluzione non euclidea, 1991, Torino.
- [14] M. Kline, Storia del pensiero matematico. Vol. I, Einaudi Editore, 1991, Torino.
- [15] M. Kline, Storia del pensiero matematico. Vol. II, Einaudi Editore, 1991, Torino.
- [16] G. Loria, Storia delle matematiche Vol I, 1929, Torino.

- [17] E.J. Borowski, J.M. Borwein, Dizionario Collins della Matematica, Gremese Editore, 1998 pag 13., Città di Castello (PG).
- [18] G.H.Nesselmann, Essez der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin ben Alhosain aus Amul, arabisch und deutch, 1843, Berlin.
- [19] N. Bourbaki, Elementos de historia de las Matematicas, 1976, Madrid. (Ed. orig.: Eléments d’histoire des mathématiques. Hermann : 1969, Paris).
- [20] E. Bortolotti, Prefazione e analisi di “L’Algebra”. In Bombelli, pag. XXV-LIX, 1966.
- [21] R. Franci, M. Pancati, Introduzione di “Il Trattato d’Algibra”. In Anonimo, pag. I- XXIX, 1988.
- [22] P. Ver Eecke, Introduzione di “Le livre des nombres carrés”. In Leonard de Pisa, pag. IX-XXV, 1952.
- [23] Giacalone C., Il Pensiero Sistemico nel passaggio dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico con l’utilizzo del mediatore informatico Excel nella scuola elementare (9-10 anni), Comunicazione al Convegno Internazionale “La ricerca in didattica delle discipline” (Palermo 10-12 gennaio 2001), G.R.I.M.- Facoltà di Scienze della Formazione – SISIS Sezione di Palermo.

SITI WEB CONSULTATI

- [1] Sito Internet: <http://www.matetico.it/>
- [2] Sito Internet: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>
- [3] Sito Internet: <http://www.dm.unibo.it/umi/>
- [4] Sito Internet: <http://matematica.uni-bocconi.it/>

Indice

Introduzione p. 1

Capitolo 1

- 1.0 Cosa si intende per pensiero algebrico (Analisi dello sviluppo storico dell'Algebra) p. 3
- 1.1 Percorso storico P. 6
 - 1.1.1 I FASE p. 7
 - 1.1.2 II FASE p. 13
 - 1.1.3 III FASE p. 22
 - 1.1.4 Qual è il ruolo dell'Algebra nel nostro paradigma tecnologico? P. 25

Capitolo 2

- 2.0 Le conoscenze aritmetiche influiscono sullo sviluppo del pensiero algebrico e sulle tecniche risolutive? P. 30

Capitolo 3

- 3.0 Analisi sperimentale (analisi a-priori e dati raccolti) p. 42
- 3.1 Analisi a-priori p. 45
- 3.2 Analisi dei dati raccolti p. 65

Conclusione p. 75

Bibliografia p. 78

Indice

p. 81

Allegato 1 (I dati sperimentali)

Allegato 2 (II Test)

I DATI SPERIMENTALI

Dati sperimentali: IV Ginnasio (Liceo Classico Garibaldi), I Liceo (Liceo Scientifico Galileo Galilei) e I Liceo (I.T.C. Pareto).

Dati sperimentali: V Ginnasio (Liceo Classico Garibaldi), II Liceo (Liceo Scientifico Galileo Galilei) e II Liceo (I.T.C. Pareto).

Dati sperimentali: I Liceo (Liceo Classico Garibaldi), III Liceo (Liceo Scientifico Galileo Galilei) e III Liceo (I.T.C. Pareto).

TEST

Nome.....

Classe.....

Quesito 1:

Dopo aver letto quel che segue:

Un padre aveva 26 anni alla nascita di suo figlio. Moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si ottiene il numero 456.

Qual è l'età attuale del padre ?

E quella del figlio ?

Risolvi e motiva

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 2:

Dopo aver letto quel che segue:

Una squadra di calcio ha comprato dei palloni a 25 €l'uno.

Sul prezzo complessivo gli hanno realizzato uno sconto di 10 €

Se la squadra ha pagato in totale 240,00 € quanti palloni hanno comprato?

Risolvi e motiva

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 3:

Dopo aver letto quel che segue:

Trova 3 numeri interi consecutivi tali che la somma dei loro quadrati sia 50

Risolvi e motiva

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 4:

Dopo aver letto quel che segue:

E' vero che se ad un numero intero si somma 4 e poi si moltiplica per 80 si ottiene 2.360 ?

Risolvi e motiva

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 5:

Risolvi la seguente espressione algebrica:

$$2x(x-10) + 5(3x^2-4x) = 5x(3x-4) - 2x(4x-5)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 6:

Risolvi la seguente espressione algebrica:

$$x^2/4 = x/32$$

.....

.....

.....

.....

.....

Quesito 7:

Traduci in formule, usando le variabili S (per il numero degli studenti) ed P (per il numero dei professori) l'enunciato:

<<in questa scuola gli studenti sono sei volte i professori>>

.....

.....

.....