"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 16, 2006.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

Gli scacchi come strumento per la didattica della matematica

Luca Barzanti[1] e Stefania Fabbri[2]

Abstract

Interrelation between mathematics and chess is widely documented, on various levels, in the literature of both disciplines.
This paper shows how chess can be effectively used for introducing logical and mathematical concepts of several types; it also indicates didactic themes that exploit the many resources of the game.
Chess problems, for instance, are used in order to introduce elements of logic and (if presented in an adequate manner) to develop lateral thinking. The chessboard is a representation of the Cartesian plane, while the equation of a straight line and its slope are introduced by means of the movement of pieces. The chessboard and the pieces (its 'residents') are also suitable for topological considerations on the properties of topological spaces.
The didactic units proposed here have been successfully experimented with primary and middle school children, through the mediation of their mathematics teachers.

Riassunto

Le relazioni tra matematica e scacchi sono ampiamente documentate, a vari livelli, nella letteratura di entrambe le discipline.
Nella presente nota si mostra come gli scacchi possano essere efficacemente utilizzati per l'introduzione di concetti logici e matematici di diversa natura; vengono inoltre indicati percorsi didattici che utilizzano le molteplici risorse offerte dal gioco.
Il problema di scacchi, ad esempio, è utilizzato per introdurre elementi di logica e, proposto in modo opportuno, per sviluppare il pensiero laterale. La scacchiera rappresenta una esemplificazione del piano cartesiano ed attraverso il movimento dei pezzi viene introdotta l'equazione della retta e la relativa pendenza. La scacchiera ed i pezzi, i suoi 'abitanti', si prestano anche a considerazioni di natura topologica relative alle proprietà dello spazio ambiente.
Le unità didattiche proposte sono state sperimentate con successo con bambini delle scuole elementari e medie inferiori, attraverso la mediazione dei loro insegnanti di Matematica.

---

[1] Università degli Studi di Bologna, Dipartimento di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, viale Filopanti, 5 – 40126 Bologna. E-mail: lbarzant@spfo.unibo.it
[2] Insegnante di scuole superiori classe A047 – Matematica. E-mail: stefania.fabbri@inwind.it

l. La matematica e gli scacchi.

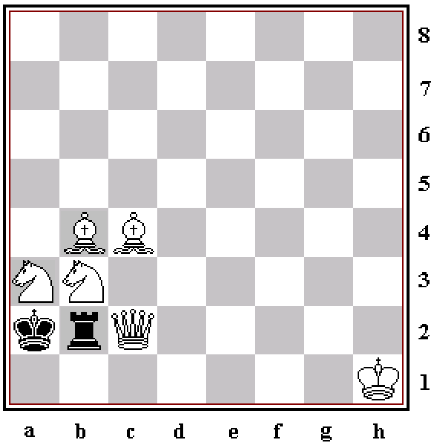
La matematica costituisce un mondo affascinante che può essere avvicinato e apprezzato sin dalla giovane età, soprattutto se presentato in maniera divertente, mettendone in risalto non tanto i formalismi, quanto le idee e gli aspetti creativi, stimolando la curiosità e l’apprendimento.
II gioco rappresenta in tal senso uno strumento ideale e numerose idee matematiche si prestano ad essere proposte sotto forma di gioco: la matematica cosiddetta dilettevole, che ha appassionato nei secoli studiosi e profani, è un modo efficace per avvicinarsi con spirito creativo a concetti e problemi tutt'altro che banali. In tale contesto il gioco degli scacchi assume un ruolo di primaria importanza. La sua complessità strutturale e ricchezza intrinseca, infatti, ne fanno un mondo per certi aspetti assimilabile a quello matematico, tant'è che i legami tra matematica e scacchi sono da sempre materia di studio a partire da temi elementari e fantasiosi (come quello dei chicchi di grano da disporre in una successione determinata sulla scacchiera per ricompensare il leggendario inventore del gioco), fino ad arrivare ad argomenti più concreti e complessi, come i problemi classici, tra cui il celeberrimo ‘salto di cavallo’, affrontati da grandi matematici come Eulero.
Lo svolgersi stesso della partita ha qualcosa in comune con l’esperienza dello studio matematico: nella fase di apertura il giocatore utilizza tra le sue conoscenze di teoria quelle necessarie ad impostare correttamente un particolare tipo di gioco, così come il matematico, affronta un problema dapprima attingendo dal proprio sapere quei particolari strumenti che occorrono nello specifico. Inquadrare nell'evolversi un'apertura è come sviscerare una questione matematica nei suoi vari aspetti.
Nel centro partita la creatività e l'intuizione si fondono con le capacità logiche necessarie per 'vedere' una situazione in evoluzione, così come la scoperta matematica necessita di un coinvolgimento totale delle diverse capacità umane allo scopo di trovare un collegamento prima sconosciuto.
II finale è la parte metodica della partita; è l'unica fase completamente teorizzabile: nelle varie circostanze si riesce a determinare il vincitore e in linea di principio il procedimento che porta alla vittoria. E' così anche in matematica ove, giunti in certe situazioni o scritte certe equazioni, si sa che il problema può essere portato a completa risoluzione utilizzando tecniche note.
Ancor più della partita il problema di scacchi è simile ad un problema matematico: alle considerazioni precedenti, nella sostanza ancor valide, si aggiunge la coincidenza degli scopi (ora in entrambi i casi c'è un problema da risolvere) e della fase di impostazione: la formulazione del problema è univoca e rigorosa e occorre intraprendere il ragionamento studiando le proprietà. In definitiva si direbbe che le qualità del bravo scacchista sono le stesse caratterizzanti il buon matematico.
G.H.Hardy ha scritto nella sua ‘Apologia di un matematico’: «Ogni paese civile conta innumerevoli giocatori di scacchi (in Russia quasi tutte le persone colte giocano a scacchi), che sanno apprezzare la 'bellezza' del gioco o di un problema.

Ebbene, un problema di scacchi non è altro che un esercizio di matematica pura (una partita non lo è del tutto, perché in essa entrano in gioco fattori psicologici). Ora, se un problema di scacchi viene definito 'bello' è la sua bellezza matematica che viene esaltata,...».
Hardy introduce un altro importante elemento comune alle due discipline, che è quello dell'estetica. La passione e il godimento che il matematico prova nella scoperta sono in qualche modo simili ai sentimenti dello scacchista che vince una partita o risolve un problema, e questo non solo per il compiacimento della forza delle idee sviluppate, ma anche per il senso di armonia e di ordinata bellezza che quanto compiuto produce.
Un ulteriore elemento comune alle due discipline è il rapporto tra concretezza e astrazione. La capacità di astrazione necessaria per poter 'far bene' matematica deve essere opportunamente compenetrata nella fase didattica con l'esigenza di concretezza del neofita, così come nel gioco degli scacchi vanno giustamente calibrate l'esigenza di concretezza (spostare i pezzi sulla scacchiera) con la necessità di astrazione della regola del 'pezzo toccato, pezzo mosso', che impone di saper 'vedere' la posizione in evoluzione senza toccare i pezzi.
Educare all'astrazione negli scacchi, dunque, è utile per l'acquisizione dell'astrazione matematica, che rappresenta una tappa decisiva nell'apprendimento in questo campo.
E' ora il momento di occuparsi di come gli scacchi siano utili nell'insegnamento di diversi argomenti di matematica.
I seguenti esempi sono il frutto non solo di una elaborazione compiuta a tavolino, ma anche della concreta esperienza vissuta coi bambini.
E' opportuno precisare che gli scacchi si correlano anche alla matematica di alto livello (calcolo combinatorio, ecc.), ma preferiamo in questa sede limitarci ad esempi riguardanti argomenti di più agevole ed ampia applicazione.

2. Il problema di scacchi.

E' possibile sviluppare alcuni elementi di logica e di informatica utilizzando il problema di scacchi; si potrebbero cioè impostare lezioni in cui parallelamente al concerto di problema di scacchi vengono introdotti elementi di logica e di logica – informatica.
Lo scopo è quello di dare concretezza e senso immediato a quanto si propone catturando nello stesso tempo l'attenzione del bambino con continue variazioni di ritmi e di temi. In letteratura non abbiamo trovato definizioni di problema di scacchi che risultino precise e complete.
Di solito si usa definirlo come segue: «si intende per problema di scacchi una posizione di pezzi creata dalla mente del compositore nella quale il Bianco, con un numero di mosse prestabilite, deve dare scacco matto al Nero o viceversa.» [2].
E' facile convincersi che tale definizione dà luogo ad ambiguità.
Si prenda ad esempio la posizione B: Rhl,Dc2,Ab4,Ac4,Ca3,Cb3; N: Ra2,Tb2, illustrata nel diagramma seguente:

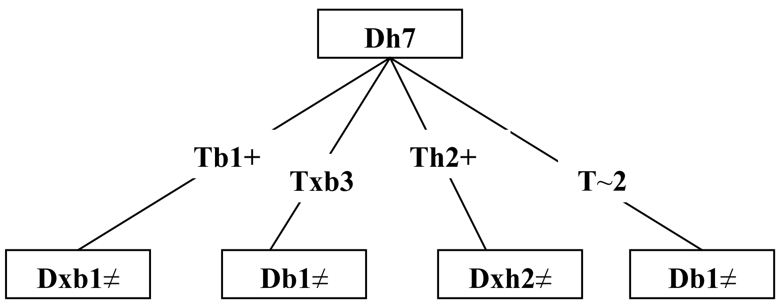
Fig. 1



La sequenza di mosse: 1. Ddl, se 1....,Tc2, allora 2.Dbl≠; se 1....,Tb1+ allora 2.Dxb1≠ non costituisce una soluzione del problema, poiché non contempla tutte le possibili varianti.
Infatti se 1....,Th2+ non è possibile trovare una contro mossa del Bianco che dia scacco matto. Nella definizione precedente tale aspetto, benché insito in 'deve dare', non è sufficientemente esplicitato tant'è che molti bambini a cui il problema viene così spiegato sono convinti di averlo risolto ogni qualvolta si trovano di fronte ad una situazione come quella ora descritta.
Cerchiamo di chiarire cosa significa risolvere un problema, prendendo per semplicità in esame problemi in due mosse in cui è il Bianco a dare scacco matto: occorre trovare una mossa del Bianco (che esiste, è unica ed è detta 'mossa chiave') tale che per qualsiasi risposta del Nero esista una mossa del Bianco che dia scacco matto.
Tale formulazione, estendibile con piccole precisazioni in modo 'ricorsivo' ad un qualsiasi numero di mosse, mette in luce la presenza dei due quantificatori universale ("∀") ed esistenziale ("∃").
Col loro utilizzo e con l'ausilio dei simboli indicanti 'tale che' ("/") e l'unicità ("!"), è possibile dare una formulazione matematica: ∃ mossa chiave del Bianco, ∀ contro mossa del Nero, ∃ mossa del Bianco ≠,
o, indicando con B1 la prima mossa del Bianco, con N1 la prima del Nero, e così via,
∃! B1 / ∀ N1 ∃ B2 / ≠ .
E' stato compiuto un processo di astrazione: i quantificatori non sono comparsi dal nulla, ma hanno nello specifico un significato ed una funzione comprensibile per il bambino, che è così venuto a contatto, in modo indolore, col formalismo matematico.

Ciò ha un significato importante, poiché ci sono studi che mostrano come l’avversione per la matematica sia originata anche dal rifiuto dei suoi formalismi [1].
E’ ora possibile illustrare in altri contesti i simboli introdotti, abituando così al valore semantico del simbolo.
Si può mostrare con esempi molto semplici come scambiando le posizioni dei due quantificatori cambi completamente il significato delle proposizioni: ‘∃ una mamma ∀ figlio maschio’ è vera, mentre ‘∀ mamma ∃ un figlio maschio’ è chiaramente falsa. Lo stesso si può dire per ‘∀ micio ∃ una coda’ e ‘∃ un micio ∀ coda’.
Ci sembra anche in questo caso utile rilevare l'importanza della capacità di collegare automaticamente simbolo e significato, ricordando come non sia infrequente la confusione nello studente quando le situazioni si complicano, come spesso accade in molti argomenti di analisi matematica.
L’albero delle varianti, struttura grafica che riassume le varianti del problema, è in sostanza un diagramma di flusso, strumento utilizzato nell’approccio alla logica del calcolatore e più in generale al pensiero algoritmico.
Può dunque essere interessante, costruito l'albero delle varianti del problema analizzato (vedi fig. 2), studiarne le caratteristiche e utilizzarne la struttura per il trattamento di altri problemi.

Fig. 2
Mossa chiave: 1.Dh7
Se 1...., Tb1+, allora 2.Dxb1 ≠
Se 1...., Txb3, allora 2.Db1 ≠
Se 1...., Th2+, allora 2.Dxh2 ≠
Se 1...., T~2, allora 2.Db1 ≠.



E' qui opportuno insistere sul fatto che è il solutore a dover accertarsi di aver esaurito positivamente <u>tutte</u> le possibilità, così come il programmatore, deve assicurarsi che il suo programma contempli <u>tutti</u> i casi che si possono verificare. E' interessante mostrare come la struttura sia estendibile a problemi in più mosse (fig.3) e presentare qualche esempio di situazioni schematizzabili con diagrammi di flusso, introducendo eventualmente la struttura 'ciclo', mancante nei diagrammi di problemi di scacchi (fig. 4 e 5; si veda in proposito [3], cap. XVI - pagg. 192-198).

Fig. 3

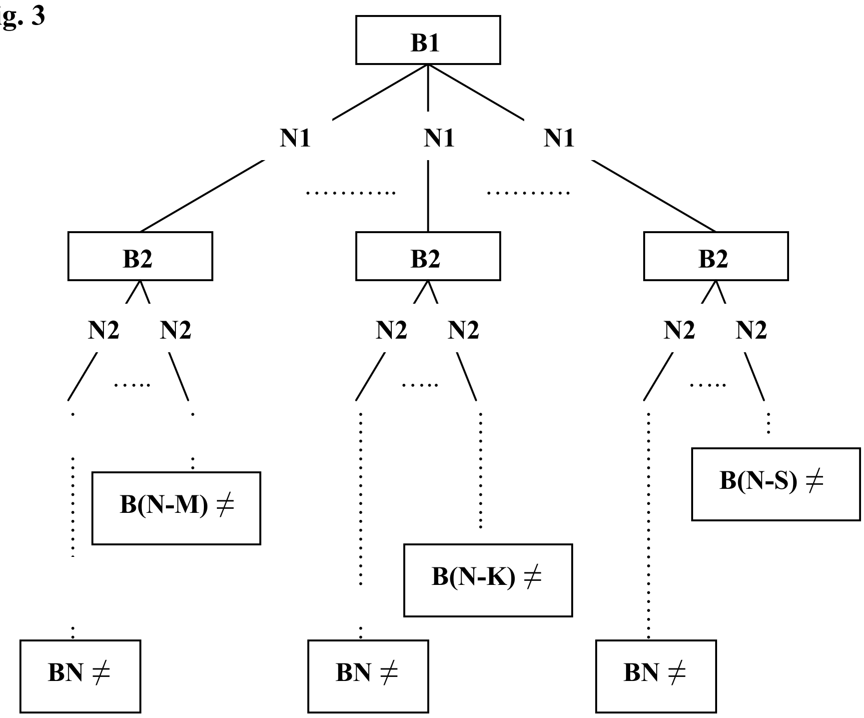


Fig. 4 OPERAZIONI NECESSARIE PER RECARSI A SCUOLA
Si suppone per semplicità che una delle alternative risolva il problema

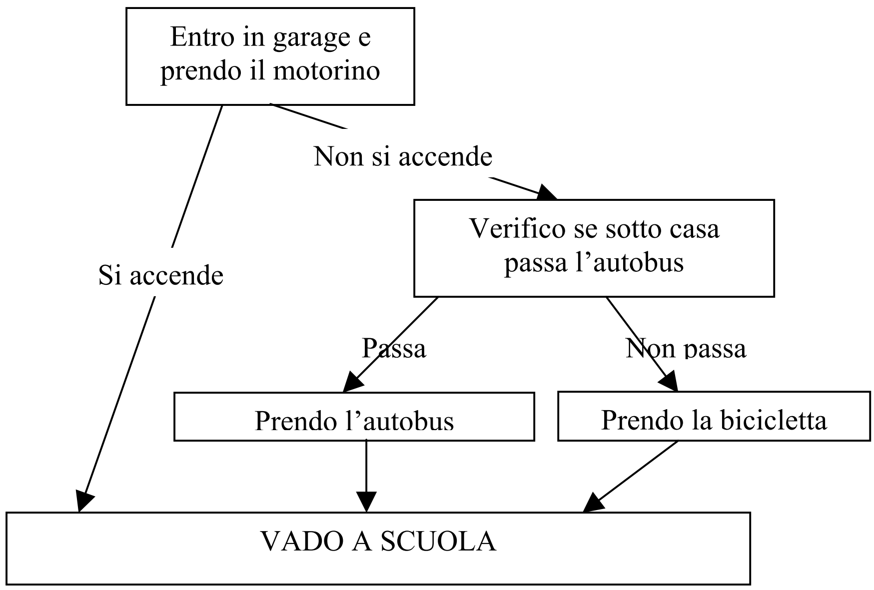
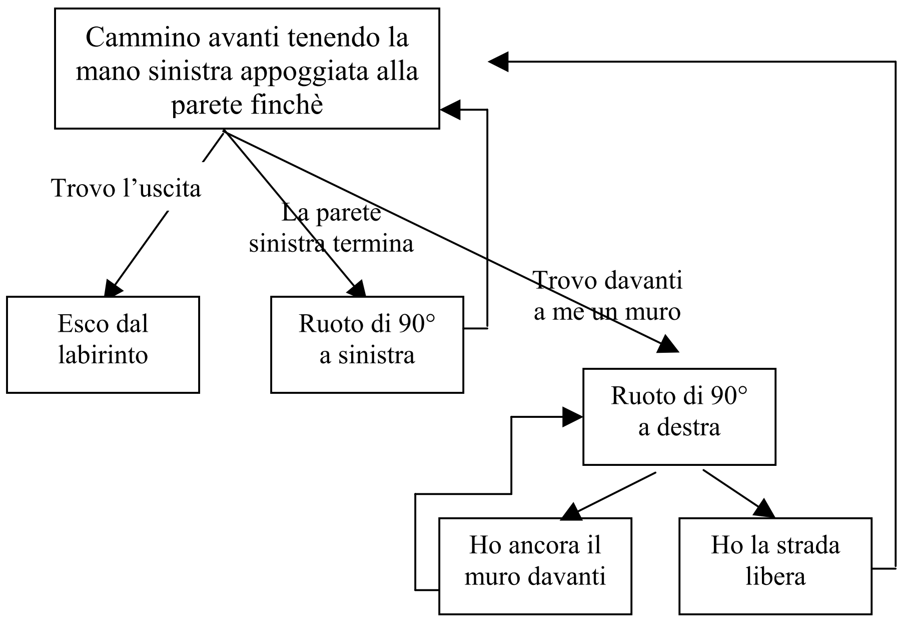


Fig. 5
OPERAZIONI NECESSARIE PER USCIRE DA UN LABIRINTO CON LA REGOLA DELLA MANO SINISTRA
(valida se la parete sinistra dell'entrata è connessa con una parete dell'uscita)



L'implicazione logica è un altro dei concetti che possono essere introdotti attraverso il problema di scacchi.
Dopo la mossa chiave, che nel problema considerato è 1.Dh7, la soluzione, esplicitata in fig. 2, mostra come ad ogni risposta del Nero segua necessariamente una specifica mossa del Bianco, cioè come nel contesto della soluzione una particolare mossa ne implichi un'altra. La figura 6 mostra come la soluzione possa essere riscritta utilizzando il segno di implicazione “$\Rightarrow$”.

Mossa chiave: 1.Dh7
1....,Tb1+ $\Rightarrow$ 2.Dxb1 $\neq$
1....,Txb3 $\Rightarrow$ 2.Db1 $\neq$
1....,Th2+ $\Rightarrow$ 2.Dxh2 $\neq$
1....,T $\sim$ 2 $\Rightarrow$ 2.Db1 $\neq$.

Fig. 6

Si può anche in questo caso generalizzare il discorso proponendo alcuni esercizi del tipo seguente:

- ***Quali di queste implicazioni sono vere?***
  a) Marco è fratello di Luisa $\Rightarrow$ Luisa è sorella di Marco
  b) Se Aldo è più grasso di Gabriele allora Gabriele è più magro di Aldo
  c) Un pattino ha 3 ruote $\Rightarrow$ due pattini hanno 6 ruote.
  d) Se n è dispari, allora 2n è pari.
  e) Se questa settimana piove tutti i giorni, allora la prossima settimana si avrà almeno una giornata di sole.
  f) Solo gli uomini mangiano $\Rightarrow$ i gatti non mangiano
  g) Tutti gli uomini mangiano $\Rightarrow$ i gatti non mangiano.
  h) Se Piero è padre di Marco e Marco è padre di Luca, allora Piero è padre di Luca.
  i) Tutti i bambini vanno a scuola $\Rightarrow$ i cani non vanno a scuola
  j) Tutti i camini fumano; mio nonno fuma $\Rightarrow$ mio nonno è un camino

- ***Indicare l'implicazione corretta:***
  Tutti gli uomini portano il cappotto $\Rightarrow$
  a) Gli uomini grandi portano il cappotto grande
  b) Gli uomini grandi portano il cappottone
  c) Gli uomini grandi portano il cappotto

Il compito di rappresentare parallelamente il problema di scacchi ed i suoi spetti matematici può presentarsi piuttosto articolato.
E' perciò possibile una metodologia didattica diversa, che preveda prima le spiegazioni riguardanti il problema di scacchi e solo successivamente l'introduzione degli aspetti matematici ad esso correlati. In questo caso, la seconda fase rappresenterà per il bambino una presa di coscienza dei meccanismi

e degli strumenti logici appresi e di come tutto ciò sia utilizzabile nei più svariati ambiti tra cui quello logico e matematico, con la veloce e piacevole acquisizione di un linguaggio più rigoroso e comprensibile.

La polivalenza del problema di scacchi come strumento educativo in ambito matematico è sorprendente. Vogliamo qui presentare, a conclusione di questo tema, due problemi eterodossi: l'uso della logica non deve limitarsi solo ad un tipo di schema e queste varianti del problema classico sviluppano l'elasticità mentale ed il pensiero laterale, qualità necessarie al buon matematico e presupposti fondamentali per quei ‘mutamenti di paradigma’ che secondo Kuhn accompagnano sempre le grandi rivoluzioni scientifiche [6].

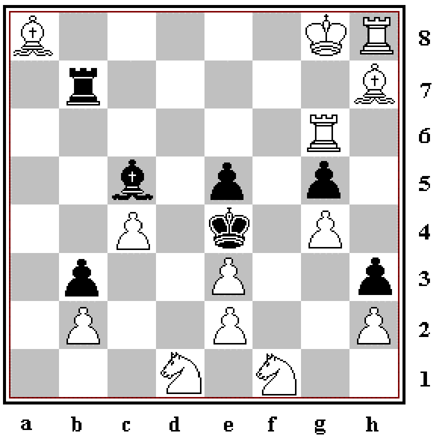


Fig. 7
Problema di Karl Fabel [5]:
Il bianco muove e non matta.

Soluzione **Tc6+**

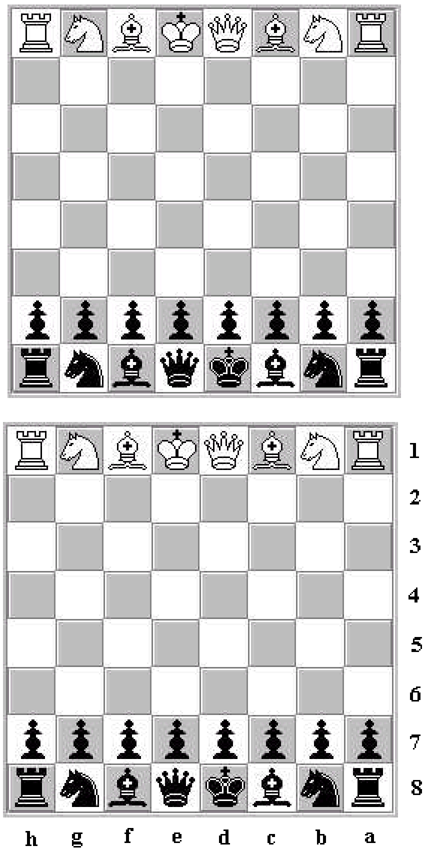


Fig. 8
Problema di Lord Dunsany [4]: questa posizione è possibile, cioè può presentarsi nel corso di una partita. Il Bianco muove e matta in 4 mosse. La soluzione richiede più pensiero logico che abilità scacchistica, sebbene sia necessario conoscere le regole del gioco. La chiave del problema è nel fatto che la Regina nera non è su casella nera come dovrebbe essere all'inizio del gioco. Ciò significa che Re e Donna neri sono stati mossi e questo può essere avvenuto solo se si sono mossi dei pedoni neri; ma questi ultimi non possono andare all'indietro. per cui bisogna dedurne che i pedoni neri hanno raggiunto le loro attuali posizioni provenendo dall'altro lato della scacchiera.
Soluzione: 1.Cd7 Se 1… Cf3,
allora 2. Cc5 Ce5;
3.Dxe5, ~ , 4.Cd3 ≠
Altrimenti 2.Ce5 e poi matto in f3 o in d3.

3. Il piano cartesiano.

I programmi delle Scuole Medie Inferiori prevedono un primo approccio col piano cartesiano, concetto fondamentale approfondito poi in tutti i rami di studio superiore. La scacchiera è, nella sostanza, un modello discreto di una porzione di piano cartesiano e si presta pertanto ad una piacevole e comprensibile introduzione a diversi argomenti, anche complessi.

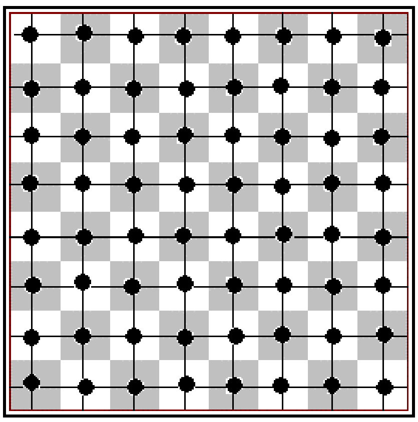


Fig. 9

Più precisamente, la scacchiera è una successione di livelli discreti rappresentati nel continuo per una esigenza materiale ed estetica; si consideri infatti che non sono possibili posizionamenti tra una casella e l’altra: è come se il pezzo si muovesse dal centro di una casella al centro di un’altra. Si può assimilare la scacchiera al modello costituito dai punti di intersezione di un reticolo discreto in cui tali punti sono

materialmente rappresentati da quadrati confinanti tra loro (fig.9).
Ogni casella è contrassegnata da un'ascissa (lettera) e da un'ordinata (numero), ma si può facilmente passare ad una rappresentazione in cui entrambe le coordinate sono numeri, introducendo il concetto di coppia ordinata.
Anche il video di un calcolatore è costituito da tante piccole 'caselle' (*pixel*) ciascuna delle quali è posta in corrispondenza biunivoca con un elemento di una matrice (determinato univocamente da una coppia ordinata di numeri) .
Ponendo gli elementi della matrice uguali a 1 o a 0, il computer può 'dire' al video quali *pixel* devono essere accesi e quali spenti, determinando così un'immagine voluta. Riferimenti come questo, utili di per sé nell'introdurre qualche nozione di logica digitale, costituiscono anche un valido espediente didattico per collegare l'argomento trattato a realtà che i bambini in qualche modo conoscono, e ciò allo scopo di stimolarne l'attenzione e l'apprendimento. L'istituzione di 'ancore mentali', con il continuo riferimento a situazioni conosciute, costituisce un valido strumento pedagogico di polivalente utilità.
In quest'ottica è possibile introdurre le caratteristiche matematiche del movimento di ciascun pezzo, presentandole come il 'carattere' o la 'personalità' che lo distinguono all'interno del mondo scacchiera.
Descrivendo casella per casella il percorso di ogni pezzo si può estrapolare la legge matematica che ne contraddistingue il movimento.

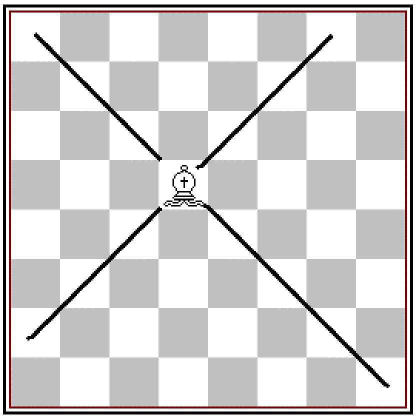
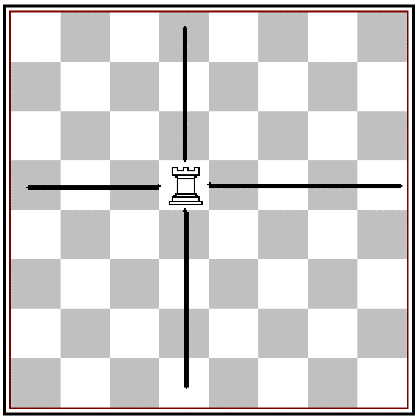


Fig. 10 L'Alfiere, ad esempio, si muove in diagonale di un qualsivoglia numero di passi.
Ricordando che la scacchiera è l'universo in cui ci poniamo, e quindi il movimento deve necessariamente essere limitato al suo interno, il carattere matematico dell'Alfiere può essere indicato nel modo seguente:
$(a,b) \longrightarrow (a+x,b+y) / x=\pm y$,
$(x,y) \neq (0,0)$,
dove si conviene di indicare con (a,b) la casa di partenza e (x,y) l'incremento a partire da questa, con x e y ovviamente numeri relativi compresi nel *range* che consente al pezzo di rimanere all'interno dell'ambiente di gioco.
E' il legame tra x e y che caratterizza il movimento.

Fig. 11 La Torre si muove per colonne e per traverse di un qualsivoglia numero di caselle
$(a,b) \longrightarrow (a+x,b)$ $x \neq 0$,
vel $(a,b) \longrightarrow (a,b+y)$, $y \neq 0$.

Ora tocca ai bambini matematizzare il movimento dei pezzi.



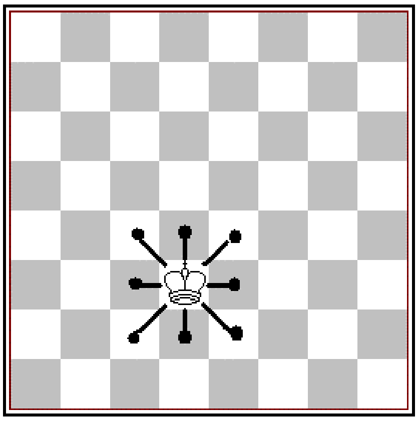
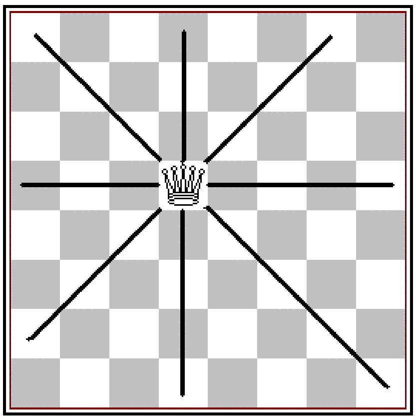


Fig. 12
Il Re si muove di una sola casella in tutte le direzioni
$(a,b) \longrightarrow (a+x,b+y) / -1 \leq x \leq 1$,
$-1 \leq y \leq 1, (x,y) \neq (0,0)$

Fig. 13 Il movimento della Donna è l'unione dei movimenti della Torre e dell'Alfiere:
$(a,b) \longrightarrow (a+x,b) / x \neq 0$, vel
$(a,b) \longrightarrow (a,b+y) / y \neq 0$, vel
$(a,b) \longrightarrow (a+x,b+y) / x = \pm y$,
$(x,y) \neq (0,0)$



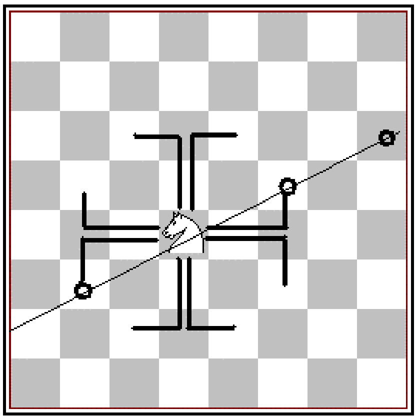
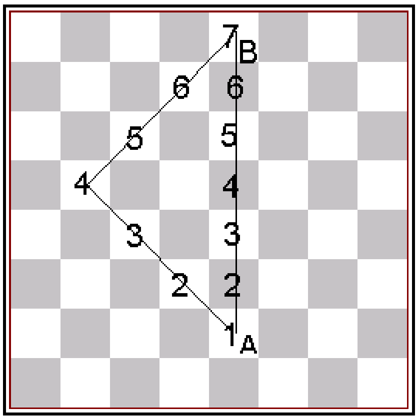


Fig. 14 Il Cavallo, infine, ha il caratteristico movimento ad 'L':
$(a,b) \longrightarrow (a+x, b+y) / x=\pm 2y$ vel $y=\pm 2x$, $x,y \neq 0$, con $-2 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 1$, vel $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$.
Si può anche considerare un nuovo pezzo, il **'cavallo birichino'**, la cui caratterizzazione matematica coincide con quella del cavallo, senza le ulteriori limitazioni su x e y :
$(a,b) \longrightarrow (a+x, b+y) / x = \pm 2y$ vel $y = \pm 2x$, $x,y \neq 0$.
La mossa del pezzo consiste dunque nella successione di un qualsiasi numero di mosse del cavallo ortodosso compiute tutte lungo la medesima direzione (per esempio lungo la direzione indicata in fig.14).
Il movimento avviene cioè lungo le rette di coefficiente angolare ± 2 vel $\pm 1/2$.
Se, compiendo il movimento di un pezzo, si pone un segno su ogni casella percorsa, risulta facilmente comprensibile come derivino figure rettilinee: le leggi matematiche presentate caratterizzano rette o segmenti. Il bambino può a questo punto comprendere intuitivamente come anche altri enti geometrici possano essere descritti con una legge matematica e come il calcolatore li possa disegnare per punti conoscendone l'equazione algebrica.

4. Lo spazio ambiente.

La scacchiera si presta anche ad interessanti spunti per l'introduzione al concetto di spazio ambiente e a semplici considerazioni di tipo topologico.
L'esistenza e le proprietà degli enti matematici dipendono in modo essenziale dall'ambiente in cui vengono considerati. Così come certi enti vivono solo in determinati spazi, allo stesso modo altri mutano le loro caratteristiche in funzione dello spazio in cui si trovano. E' importante che il bambino comprenda tali concetti e la scacchiera, come esempio di un ambiente diverso da quello euclideo, può particolarmente prestarsi a tale scopo. Essa costituisce un mondo bidimensionale caratterizzato da regole proprie. I suoi abitanti sono i pezzi, ciascuno dei quali obbedisce nel suo movimento a determinate regole, compatibili con quelle che definiscono l'ambiente.
L'unità di misura di tempo è la mossa, mentre quella di lunghezza è la casella.
Mentre nel piano euclideo un lato di un triangolo è sempre minore della somma egli altri due, sulla scacchiera non è così.



Si consideri ad esempio la lunghezza dei due diversi percorsi che il Re deve compiere per andare da A a B (fig. 15).
In entrambi i casi il percorso è di sette caselle.

Fig. 15

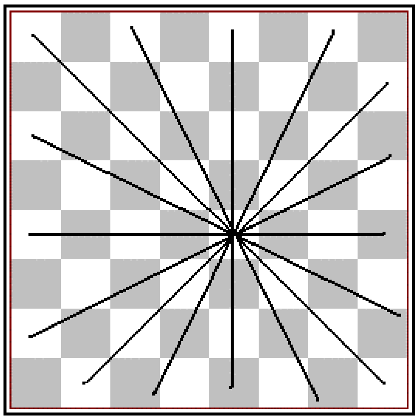
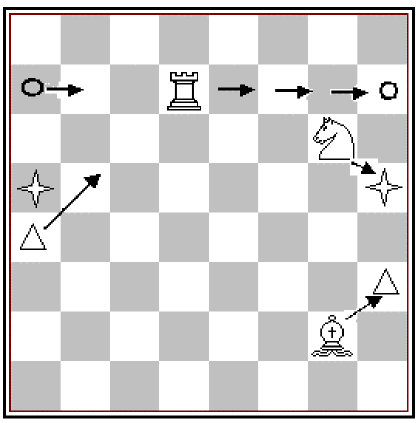


Fig. 16

Nel piano euclideo si possono individuare infinte direzioni, mentre la scacchiera è un ambiente con un numero di direzioni a priori ben determinato dal fatto che è un universo discreto e limitato (fig. 16).
Le regole di movimento dei vari pezzi, che ne costruiscono la struttura, ne escludono la quasi totalità, cosicché ne rimangono otto e sedici versi effettivamente possibili. Quattro di queste risultano privilegiate. Le altre possono essere assimilate a queste se si ammette l’uso del ‘cavallo birichino’.

Consentendo ai pezzi di prolungare il proprio movimento al di là dei limiti della scacchiera e fissando opportunamente le leggi che regolano tali possibilità si opera un mutamento topologico che trasforma l'ambiente di gioco.
Ci sembra un obiettivo interessante portare i ragazzi a contatto con qualche questione di topologia; una loro comprensione intuitiva costituirà già un buon risultato.



Le regole sintetizzate in figura 17 corrispondono all'identificazione di due bordi laterali della scacchiera e trasformano di fatto l'ambiente di gioco in un <u>cilindro</u>.
L'introduzione di regole analoghe anche per i lati orizzontali rende la scacchiera simile a un <u>toro</u>.

Fig. 17

Analogamente, qualora si consenta ai pezzi, giunti a un bordo laterale di 'riapparire' sul lato opposto in posizione simmetrica alla precedente rispetto alla linea di metà campo, la scacchiera sarà simile a un nastro di Möbius e, se la stessa identificazione verrà effettuata sugli altri due bordi, sarà come giocare su una sfera.
Identificando infine i bordi laterali come in figura 17 e quelli superiore e inferiore come in figura 18, si ottiene una bottiglia di Klein.

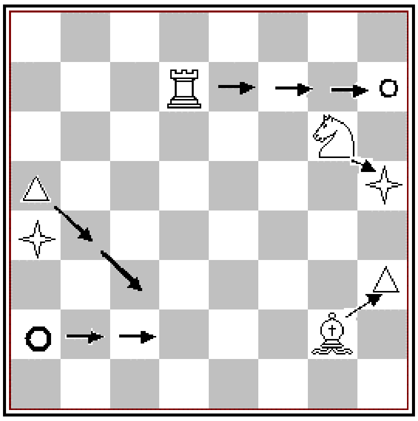


Fig. 18

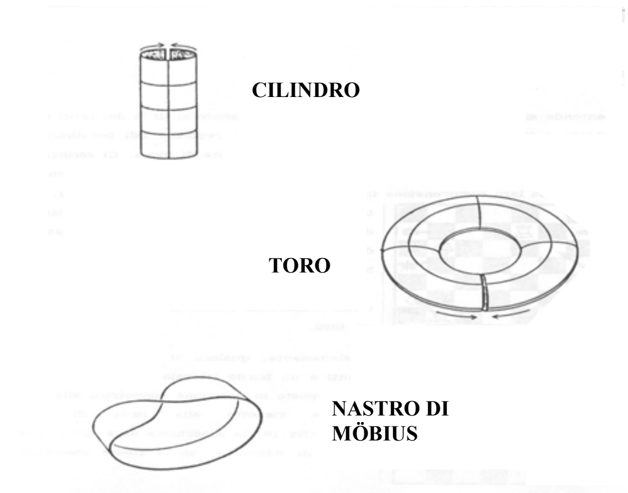


Fig. 19

5. Conclusioni.

L'analisi effettuata e gli esempi illustrati sono a nostro avviso sufficienti a mostrare come gli scacchi non siano solo un gioco affascinante, logico e genericamente formativo, ma possano essere utilizzati con efficacia in didattica della matematica ai vari gradi di scolarità.
Vale dunque la pena di procedere nell'approfondimento di tematiche riguardanti gli scacchi, a nostro parere principalmente in due direzioni:

- Sviluppo di ulteriori metodologie che si avvalgano degli scacchi per un insegnamento più stimolante di particolari argomenti di matematica.
- Elaborazione di percorsi didattici che utilizzino i vari aspetti e manifestazioni dell’attività scacchistica (studio della teoria, soluzione di problemi, analisi di partite, simultanee,...) allo scopo di sviluppare più in generale le attitudini e le capacità logiche e matematiche.

Bibliografia

[1] J. Canestri e S. Oliva, “La matematica sul lettino”, *Sapere,* 1992, Gennaio (pagg. 45-56) e Febbraio (pagg. 29-37).
[2] A. Chicco e G. Porreca, “Il libro completo degli scacchi” , Mursia, 1973, pag. 417.
[3] B. D'Amore, “Approcci matematici nella scuola dell’Infanzia”, La Nuova Italia, 1987.
[4] M.Gardner, “Enigmi e giochi matematici”, vol. 2, Sansoni, 1990, pagg. 123, 128.
[5] M.Gardner, “Enigmi e giochi matematici” , vol. 3, Sansoni, 1990, pag. 218.
[6] T.S.Kuhn, “La struttura delle rivoluzioni scientifiche”, Einaudi, 1978.