

Università degli studi di Palermo

SISSIS- Anno Accademico 2000-2001

Didattica della Matematica

I Logaritmi:

dalla Nascita alle sue Applicazioni

Relatori:

Maria Elena Bono

Floreana Bono

Giuseppa Castiglione

Logaritmi nella Storia

I Logaritmi fanno la loro prima apparizione durante la Rivoluzione scientifica: le enormi scoperte nel campo dell'astronomia (Keplero per esempio ne fece grande uso) e della navigazione necessitavano di un robusto apparato matematico, ma soprattutto di un operatore in grado di rappresentare numeri molto grandi o molto piccoli.

Micael STIFEL (Esslingen, 1487 - Jena, 1567, Germania)

Può essere considerato il pre-inventore dei logaritmi: nella sua opera "*Aritmetica Integra*" (1544) per la prima volta compare il calcolo di potenze con esponenti razionali non interi e realizza uno schema, riportato in tab. 1, che costituisce **la prima rudimentale tavola dei logaritmi (in base 2)**.

tab.1

Logaritmi:	0	1	2	3	4	5
Numeri:	1	2	4	8	16	64

L'idea che ne sta alla base, è il confronto tra i termini della progressione geometrica di ragione r (base del logaritmo):

$$1, r, r^2, r^3, \dots$$

e i termini della corrispondente progressione aritmetica formata dagli esponenti

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Dal punto di vista applicativo uno schema di questo tipo si può interpretare come la corrispondenza intercorrente nella crescita di

una cellula, o di una popolazione alla quale all'istante iniziale venga attribuito convenzionalmente il valore 1, che raddoppia la propria numerosità dopo ogni intervallo di tempo unitario.

Dopo 50 anni **Napier**, prendendo spunto dagli studi effettuati da **Stifel** approfondisce l'idea di **logaritmo**, questa volta come progressione geometrica di ragione 10.

John NAPIER (Edimburgo - Scozia, 1550-1617)

Barone di Merchistone, era un matematico dilettante, che principalmente si dedicava a questioni teologiche e religiose, ma che consegnò il suo nome alla fama per le sue opere sui logaritmi e sulla geometria e trigonometria .



Fu egli a coniare il termine **logaritmo** (dal greco: *lògon* [ragione, intesa qui nel senso usato nelle progressioni geometriche, cioè *rapporto*] e *arithmòs* [numero]: numero razionale, nel senso di numero "artificiale", creato dalla ragione).

La sua discussione sui logaritmi appare nella celebre opera "**Mirifici logarithmorum canonis descriptio**" del 1614. Con essa egli sperava di fornire uno strumento che rendesse **molto più veloci i calcoli** degli astronomi. Laplace, 200 anni dopo, riconobbe il successo di questo intendimento, scrivendo che il lavoro di Napier "aveva raddoppiato la vita agli astronomi".

Consideriamo le seguenti successioni di numeri ed i corrispondenti logaritmi (che non sono altro che gli esponenti delle corrispondenti potenze di 10):

Logaritmi:	0	1	2	3	4	5
Numeri:	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5

Per avere il prodotto di due numeri della seconda successione (**progressione geometrica**), basta fare la somma dei due corrispondenti della prima e poi trovare il numero della seconda che corrisponde a tale somma. (ad esempio: $10^2 \cdot 10^3 = 10^{(2+3)}$).

Analogamente una divisione può diventare una sottrazione.

Problema : i termini della progressione geometrica con base 10 sono molto distanti fra loro ($10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, ...); come si poteva allora rendere più fitta tale sequenza?

Idea di Napier

Per mantenere molto vicini tra loro i termini della progressione geometrica delle potenze intere di un dato numero è necessario assumere come ragione una cifra molto vicina ad 1.

Napier scelse come base $1-10^{-7}$ (ossia **0,9999999**), e moltiplica per 10^7 per ottenere un maggiore equilibrio ed evitare cifre decimali.

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7} \right)^L$$

Dove **L** è il “**Logaritmo**”
del numero **N**

Napier si costruisce la successione così fatta:

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7} \right)^0 = 10^7 \quad \text{e quindi} \quad \log 10^7 = 0$$

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7} \right)^1 = 9999999 \quad \text{e quindi} \quad \log 9999999 = 1$$

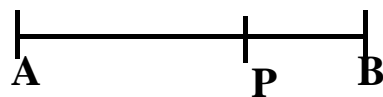
.....

La definizione data da Napier era diversa dalla nostra.

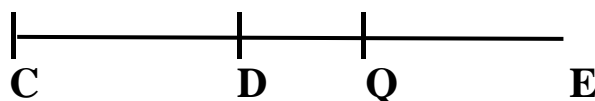
Spiegazione Geometrica dell'invenzione dei logaritmi

I principi della sua “**Regola Meravigliosa**” venivano spiegati da Napier in termini geometrici.

Dato un segmento lineare **AB**



ed una semiretta



Il punto **P** parte da **A** e si muove lungo **AB** con velocità variabile decrescente in rapporto alla distanza da **B**,

contemporaneamente un punto **Q** partendo da **C** cominci a muoversi lungo **CDE...**, con velocità costante uguale a quella che **P** all'inizio del suo moto.

Napier chiamava questa distanza variabile **CQ** il logaritmo della distanza **PB**.

Se interpretiamo il ragionamento di Napier, alla luce dei moderni strumenti, ponendo

$$\mathbf{PB} = x \quad \mathbf{CQ} = y$$

E ponendo le condizioni iniziali

$$x_0 = 10^7 \quad \text{e} \quad y_0 = 0$$

si ha:

$$y = -10^7 \ln cx,$$

dove c in base alle condizioni iniziali è uguale a 10^{-7} .

Per Napier il logaritmo di un prodotto generalmente non era uguale alla somma dei logaritmi:

$$N_1 = 10^7 (1 - 10^{-7})^{L_1}$$

$$L_1 = \log N_1$$

$$N_2 = 10^7 (1 - 10^{-7})^{L_2}$$

$$L_2 = \log N_2,$$

$$\frac{N_1 N_2}{10^7} = 10^7 (1 - 10^{-7})^{L_1 + L_2}$$

In questo modo la somma di due logaritmi neperiani sarà il logaritmo non di $N_1 N_2$ ma di $\frac{N_1 N_2}{10^7}$.

Il concetto di **funzione** logaritmica è implicito nella definizione di Napier e in tutte le sue ricerche sui logaritmi, ma tale relazione non aveva ai suoi occhi un rilievo particolare.

Quasi contemporaneamente ai calcoli di Napier :

Henry Briggs (Warleywood, 1561 – Oxford, 1630, Inghilterra) **introdusse la base 10** ed approntò le tavole dei logaritmi decimale di 30.000 numeri naturali con 14 cifre decimali (in “**Arithimetica logarithimica** “ del1624).

Nel 1615 Briggs, professore di geometria ad Oxford, fece visita a Napier in Scozia per discutere sulle possibili modificazioni da introdurre nel metodo dei Logaritmi. E' chiaro che il problema era decidere la base e “ il punto di partenza”.

Alla fine convennero che:

$$\begin{aligned}\log_{10} 1 &= 0 \\ \log_{10} 10 &= 1\end{aligned}$$

Partendo da questi dati iniziali ed utilizzando le proprietà delle potenze **calcolò altri logaritmi mediante successive estrazioni di radici**, diversamente da quanto aveva fatto Napier.

Ad esempio, sapendo che $\log 10 = 1$ e calcolando

$\sqrt{10} = 3,162277$ Briggs otteneva $\frac{1}{2} \log 10 = \log 3,162277$ e cioè $\log 3,162277 = 1/2 = 0,5$.

Nel 1617, anno della morte di Napier, Briggs pubblicava “**Logarithmorum chilia prima** “, cioè la prima tavola logaritmica da 1 a 1000.

Nel frattempo contemporaneamente a Napier un altro matematico affrontò lo studio dei logaritmi:

Jobst Burgi (Svizzera 1588)

Non è da escludere che l'idea dei logaritmi sia venuta a Burgi fin dal 1588, circa 6 anni prima che Napier cominciasse a lavorare nella stessa direzione, pubblico' i suoi studi a Praga nel 1620, in un libro intitolato: "***Arithmetische und Geometrice Progress Tabulen***".

A differenza di Napier anzichè partire da un numero leggermente minore di 1 cioè $(1 - 10^{-7})$, Burgi scelse come base $1 + 10^{-4}$ e moltiplico' tale numero per 10^8 anzichè 10^7 :

$$N = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4} \right)^L$$

Burgi chiama $10L$ il numero "rosso" corrispondente al numero "nero" N . I logaritmi di Burgi si avvicinano ai nostri più di quelli di Napier: infatti col crescere dei numeri neri crescono anche i numeri rossi. Entrambi i sistemi pero' presentano lo svantaggio che il logaritmo di un prodotto o di un quoziente non e' la somma o la differenza dei logaritmi.

(Con l'invenzione del regolo calcolatore data***** da parte di **Edmun Gunter**, i logaritmi di Napier furono utilizzati nei dispositivi meccanici per sveltire l'esecuzione dei procedimenti aritmetici).

Solamente agli inizi del '700 con **Eulero** i logaritmi diventano oggetto matematico adottando un linguaggio ed

una notazione che per molti aspetti corrispondono a quelli usati oggi. Eulero fu il primo ad usare la lettera **e** per rappresentare la base del sistema dei logaritmi naturali o neperiani. Egli inoltre nel 1747 chiarirà definitivamente la questione sui logaritmi dei numeri negativi avviata con una con una accesa “controversia” tra Leibniz e Bernoulli.

Leibniz ed i suoi sostenitori asserivano che i logaritmi dei numeri negativi devono essere interpretati come quantità immaginarie.

Bernoulli e gli altri, invece, affermavano che il logaritmo di un numero negativo era un numero reale uguale al logaritmo del corrispondente numero positivo.

$$\log(-x)=\log(+x)$$

e a tal proposito portava il seguente esempio:

$$2\log(-1)=\log(-1)^2 = \log(+1)^2=2\log(+1)$$

Eulero introdusse l'espressione:

$$e^{iw}=\cos w + i\sin w \quad (1)$$

Poi ponendo $w=i\pi$ la (1) diventa $e^{-1}=-1$ da cui:

$$\log_e (-1) = i\pi$$

Nel 1787 Franceschini pubblica un lavoro intitolato “**De logaritmi de' numeri negativi**” in cui l'autore si proclama deciso assertore della tesi di leibniziana ed euleriana.

Egli riprende l'introduzione neperiana e spiega la corrispondenza tra progressione geometrica e progressione aritmetica in termini di isomorfismo Frase*****

Definizione di Logaritmo

Da un punto di vista didattico il logaritmo può essere presentato in due modi differenti:

1. Dopo avere dimostrato, o comunque enunciato, il seguente teorema:

Teorema: Se a è positivo e diverso da 1 e b è positivo, esiste ed è unica la soluzione dell'equazione:

$$a^x = b.$$

Si definisce il logaritmo come soluzione dell'equazione precedente che viene indicata con l'espressione :

$$x = \log_a b$$

che si legge **Logaritmo di b in base a** .

2. In alternativa, si definisce il logaritmo come inversa della funzione esponenziale. Infatti, a partire dalla funzione esponenziale $y=a^x$ si fa' osservare che essa e' invertibile: decrescente se $0 < a < 1$; crescente se $a > 1$. E quindi si può considerare la funzione inversa: dato un valore y , x dovrà essere l'esponente da dare alla base per ottenere y .

In entrambi i casi si giunge alla seguente definizione:

Definizione: Si dice *logaritmo in base a* di un numero *b*
l'esponente *c* che si deve dare ad *a* per avere *b*:
$$c = \log_a b$$

dove ***a*** è detta **base** del logaritmo e ***b***
argomento.

In particolare:

- a) per $a=10$ si ha il sistema dei **logaritmi decimali** (volgari o di **Briggs**);
- b) per $a=e \approx 2,71828$ si ha il sistema dei logaritmi **naturali** o **neperiani**.

Analisi dei libri di testo

Dall'analisi dei testi si evince che la scelta della prima o seconda definizione non è del tutto casuale, in quanto abbiamo osservato che in genere i testi che si rivolgono a ragazzi di un biennio di scuola media superiore adottano la prima, mentre i testi destinati al triennio preferiscono la seconda, sia nei licei che negli istituti tecnici.

Per esempio, nei testi “**Algebra**” (M. Besostri - G. Lepre) e “**Aritmetica ed Algebra** “ (R. Ferrauto), entrambi rivolti ad un biennio, si definisce il logaritmo usando il primo approccio, nel contesto della risoluzione delle equazioni, e non si affronta lo studio del logaritmo come funzione in quanto per queste classi, alla luce dei programmi vigenti, non è prevista una trattazione analitica-rigorosa della funzione. Invece nei testi rivolti al triennio, per esempio: “**Matematica tre**” (L. Lamberti - L. Mereu – A. Nanni) e “**Matematica: Strumenti per l'economia**” (M. Re Fraschini – G. Grazzi – C. Spezia) lo studio dei logaritmi è inserito nel

contesto delle funzioni, proponendo la funzione logaritmica come esempio di funzione continua.

Sta quindi all'insegnante trasmettere la continuità tra i due approcci e non trascurare il primo (per mancanza di tempo, perché li ritiene marginali rispetto agli altri argomenti del programma...) causando problemi operativi nello studio futuro della funzione logaritmica.

Analisi delle difficoltà e degli errori

Dopo l'analisi storica di una conoscenza, l'analisi degli errori è una fase fondamentale per l'individuazione di un ostacolo epistemologico, poiché attraverso la ricerca degli errori ricorrenti si possono scoprire le concezioni dalle quali essi derivano e le rappresentazioni che l'alunno si crea per la comprensione e l'assimilazione di una data conoscenza, come cioè egli la inserisce nella sua "rete di significati".

In particolare in questo paragrafo cercheremo di evidenziare la rappresentazione che in genere gli alunni si creano sul logaritmo descrivendo gli errori ricorrenti e le cause da cui essi derivano.

1) Un alunno del **biennio**, seguendo l'approccio utilizzato dal suo libro di testo (logaritmo come soluzione dell'equazione) in presenza di un'equazione del tipo

$$(-2)^x = (-8)$$

è portato a scrivere come unica soluzione

$$x = \log_{-2}(-8)$$

senza riflettere sul segno della base e dell'argomento.

La causa che induce l'alunno in questo errore deriva dal fatto che, sia il libro che l'insegnante si limitano ad una definizione di logaritmo come **operatore**. Risalendo, invece, alle origini del concetto, si potrebbe presentare il logaritmo a partire dalla progressione geometrica che, essendo una successione a numeri positivi, non può avere ragione negativa.

2) Uno degli errori frequentemente riscontrato è del tipo

$$\log_3(27+9) = \log_3 27 + \log_3 9$$

considerando lineare **“l'operatore logaritmo”**.

Anche questo errore potrebbe essere facilmente eliminato con l'approccio indicato precedentemente.

3) Davanti ad un esercizio del tipo:

$$\log_{1/2} 8$$

l'alunno di solito non sa arrivare alla soluzione.

Questo disagio deriva dalla mancanza di manualità con le potenze ad esponente negativo.

Se invece all'alunno venisse presentata una semplice tabella di logaritmi di base $\frac{1}{2}$ del tipo

Logaritmi:	-3	-2	-1	0	1	2
Numeri:	8 = $(\frac{1}{2})^{-3}$	4 = $(\frac{1}{2})^{-2}$	2 = $(\frac{1}{2})^{-1}$	1 = $(\frac{1}{2})^0$	$\frac{1}{2}$ = $(\frac{1}{2})^1$	$\frac{1}{4}$ = $(\frac{1}{2})^2$

Individuerebbe facilmente la soluzione.

4) Un alunno del triennio che deve affrontare esercizi in cui deve determinare il dominio di funzioni del tipo:

$$f(x) = \sqrt{\log x}$$

Se riconosce che la potenza è pari scrive $\log x \geq 0$, ma in genere non si chiede nulla sul segno della x , argomento del logaritmo.

Evidentemente non ha riflettuto sulla definizione di funzione logaritmica poiché nelle sue concezioni il logaritmo rimane solamente un operatore usato per la risoluzione di equazioni.

In questi casi sarebbe opportuno che l'insegnante facesse riflettere sull'inesistenza dei logaritmi dei numeri negativi nel campo reale con l'ausilio della storia facendo riferimento per esempio a Eulero ed alla nota controversia tra Leibniz e Bernoulli sui logaritmi di numeri negativi.

5) La stessa tipologia di alunno risolve il seguente integrale in questo modo:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x + k$$

Omettendo il valore assoluto nell'argomento oppure lo scrive solo perché trova l'integrale svolto nella tabella del suo libro di testo e non si chiede la motivazione.

Conclusioni: Potremmo fare infiniti di questi esempi ma in essi si evidenzia sempre lo stesso ostacolo legato al passaggio dalla fase semantica a quella sintattica. Pertanto a nostro avviso, seguendo il pensiero di Spencer: *“La genesi del sapere nell’individuo deve seguire lo stesso corso che ha seguito nella razza”*, per un corretto approccio didattico dell’argomento si rende utile un’analisi della rappresentazione storico-epistemologica dell’argomento.

Test di verifica

1) L'esponente da dare alla base 3 per ottenere 27 è

- a) -3
- b) 3
- c) non esiste

Motivare la risposta.

2) La scrittura $\log_2 b = 4$ equivale a

- a) $b=2^4$
- b) $2^b = 4$
- c) $b = 2^4$

Motivare la risposta

3) L'espressione $\log_3 27$ è uguale a

- a) 3
- b) -3
- c) non esiste

Motivare la risposta

Questi primi esercizi vengono proposti per verificare se l'alunno sa applicare operativamente la definizione.

4) L'equazione $(-3)^x = -27$ ha soluzione

- a) $x=3$
- b) $x=\log_{-3}(-27)$
- c) non esiste

Motivare la risposta

5) L'espressione $\log_{-3}(-27)$ è uguale a

- a) 3
- b) -3
- c) non esiste

Motivare la risposta

Qui invece si vuole mettere in evidenza il senso che l'allievo dà al nuovo concetto.

6) Il $\log_2(5 \cdot 7)$ è uguale

- a) $\log_2 5 \cdot \log_2 7$
- b) $\log_2 5 + \log_2 7$
- c) $5 \log_2 7$

Motivare la risposta

7) Il $\log_2 5/7$ è uguale

a) $\log_2 5 / \log_2 7$

b) $\log_2 5 - \log_2 7$

c) $1/7 \log_2 5$

Motivare la risposta

Vogliamo indurre l'alunno a riflettere sulla non linearità del logaritmo.

In questa fase non si ha ancora una formulazione rigorosa: l'allievo si costruisce dei modelli propri a volte anche errati.

8) L'equazione $\log_2 x = 3/4$ ammette la soluzione

a) nessuna

b) $x = \log_2 (3/4)$

c) $2^{3/4}$

Motivare la risposta

9) L'equazione $\log_{1/2} x = -3/4$ ha soluzione

a) nessuna

b) $x = \log_{1/2} (-3/4)$

c) $x = \sqrt[4]{2^3}$

Motivare la risposta

Negli esempi otto e nove, il logaritmo non viene più visto come un operatore ma viene inserito in un nuovo contesto: le equazioni; adesso, non basta più possedere il modello implicito, ma si deve essere coscienti delle regole da applicare;

10) Determinare il dominio della seguente funzione

logaritmica:

$$\log_2 (3x-1) = \log_2 (x+2)$$

Infine nell'ultimo esercizio si vuole evidenziare il logaritmo come funzione, a questo punto l'alunno dovrebbe essere in possesso di un linguaggio proprio ed adottare le relazioni pertinenti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Crochemore, F. Mignosi, A. Restivo e S. Salemi. “*Text Compression Using Antidictionaries*”, Technical Report , IGM-98-9Institut Gaspard Monge, 1998.
- [2] M. Crochemore, F. Mignosi, A. Restivo “*Automata and Forbidden Words*”, Inf. Proc. Lett., 67(1998), 111-117.
- [3] F. Mignosi, A. Restivo, M. Sciortino “*Forbidden Factors and Infinite Words*”
- [4] M. Crochemore, F. Mignosi, A. Restivo “*Minimali Forbidden Words and Factor Automata*” in (MFCS’98, Lubos Brim, ed., LNCS, 1998.
- [5] M. Crochemore, C. Hancart, “*Automata for Matching Paterns*” in Handbook of Formal Languages, G. Rozenberg, A. Saloma, eds., Springer-Verlag, 1997 vol.2.
- [6] A. Blumer, J. Blumer and D. Haussler, “*The smallest automaton recognizing the subwords of a text*”, Theoretical Computer Science 40 (1985) North-Holl