



Incognita o “cosa che varia”?

L’analisi statistica implicativa e l’analisi fattoriale delle corrispondenze in una ricerca in didattica delle matematiche

Elsa Malisani* Filippo Spagnolo**

*G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull’Insegnamento delle Matematiche), Department of Mathematics, University of Palermo, via Archirafi 34, 90123 Palermo (Sicily).

E-mail: schillacimalisani@tiscali.it

**G.R.I.M. (Gruppo di Ricerca sull’Insegnamento delle Matematiche), Department of Mathematics, University of Palermo, via Archirafi 34, 90123 Palermo (Sicily).

E-mail: spagnolo@math.unipa.it

Résumé. L’introduction du concept de variable représente le point critique de la transition de la pensée arithmétique à la pensée algébrique. Ce concept est complexe parce qu’il est utilisé sous différents sens dans des situations variées.

Ce travail cherche à étudier le double aspect relationnel-fonctionnel de la variable en résolution de problème. Nous voulons analyser si la notion d’inconnue peut interférer avec l’interprétation sous l’aspect fonctionnel. L’étude s’est déroulée dans un Lycée Italien (étudiants 16-18 age).

Ce travail met en évidence les relations entre l’Analyse Statistique Implicative (ASI) et l’Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) pour falsifier des hypothèses de recherche en Didactique des Mathématiques.

L’analyse implicative met en évidence les stratégies des étudiants, l’analyse factorielle met en contraste la correspondance entre les composantes principales et les conceptions sur la variable.

Riassunto

L’introduzione del concetto di variabile rappresenta il punto critico della transizione del pensiero aritmetico al pensiero algebrico. Questo concetto è complesso in quanto è utilizzato in differenti significati e in diverse situazioni.

Questo lavoro cerca di studiare il doppio aspetto relazionale-funzionale della variabile nella risoluzione di problemi. Vogliamo analizzare se la nozione di incognita può interferire con l’interpretazione nell’aspetto funzionale, e se il linguaggio naturale e/o il linguaggio aritmetico è dominante come sistema simbolico in assenza di una matrice adeguata del linguaggio algebrico. Lo studio è stato svolto in un Liceo Italiano (età 16-18 anni).

Questa ricerca mette in evidenza le relazioni tra l’Analisi Statistica Implicativa (ASI) e l’Analisi Fattoriale delle Corrispondenze (AFC) per falsificare delle ipotesi di ricerca in Didattica delle Matematiche.

L’analisi implicativa mette in evidenza le strategie degli studenti, l’analisi fattoriale mette in contrasto la corrispondenza tra i componenti principali e le concezioni sulla variabile.

1 Introduzione

La modellizzazione attraverso argomentazioni statistiche fornisce alla ricerca in didattica delle matematiche una maggiore possibilità di trasferibilità dell’esperienza. Però l’argomentazione statistica non avrebbe alcun peso senza un’accurata riflessione teorica dal punto di vista della didattica e dell’epistemologia dei contenuti matematici (Spagnolo, 1998).

Nell’analisi a-priori della situazione didattica si considerano precisamente le rappresentazioni epistemologiche, le rappresentazioni storico-epistemologiche ed i comportamenti ipotizzabili, corretti e non corretti. L’analisi a-priori permette di individuare, tra l’altro, le variabili della situazione problema e le ipotesi di ricerca. Queste ipotesi possono essere falsificate mediante l’analisi statistica e/o l’analisi qualitativa dei dati.



Due metodi statistici molto utilizzati nell'ultimo decennio sono: l'analisi implicativa (ASI) di Regis Gras (1997, 2000) e l'analisi fattoriale delle corrispondenze (AFC). L'analisi implicativa è uno strumento potente che permette una chiara visualizzazione dei rapporti di similarità e di implicazione tra le variabili o classi di variabili della situazione problema, attraverso i grafici elaborati dal software CHIC. L'analisi fattoriale delle corrispondenze si propone di rappresentare geometricamente, in uno spazio a più dimensioni, una distribuzione di due insiemi: quello degli individui e quello delle variabili della situazione (Grass, 1997). Poiché consente un'analisi su piccoli campioni nel campo della Statistica non parametrica, contribuisce ad interpretare significativamente i fenomeni didattici. In questi ultimi dieci anni una serie di studi ha avuto lo scopo di cercare di affinare lo strumento nel campo delle ricerche didattiche, ma soprattutto di creare dei modelli ad hoc (Spagnolo, 2002).

Il presente articolo si pone come contributo agli studi che si stanno compiendo sull'applicazione dell'Analisi Statistica Implicativa (ASI) e dell'Analisi Fattoriale delle Corrispondenze (AFC) in domini diversi, in particolare, in Didattica delle Matematiche. Questa ricerca mette in evidenza le relazioni tra l'Analisi Implicativa (ASI) e l'Analisi Fattoriale (AFC) per falsificare ipotesi di ricerca in Didattica delle Matematiche. Si pretende anche analizzare il tipo di informazione ricavata dall'applicazione dei due metodi statistici.

Questo articolo è parte integrante della tesi dottorale di prossima pubblicazione: *“Il concetto di variabile nel passaggio dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico in contesti semiotici diversi”* ⁽¹⁾.

2 Quadro teorico

Gli studi sugli ostacoli che gli alunni incontrano nel passaggio dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico, rivelano che il punto critico di transizione è rappresentato dall'introduzione del concetto di variabile (Matz, 1982; Wagner, 1981, 1983).

Questo concetto è complesso perché si usa con significati diversi in differenti situazioni. La sua gestione dipende precisamente dal particolare modo di utilizzarlo nell'attività di risoluzione di problemi.

La nozione di variabile può assumere una pluralità di concezioni: *numero generalizzato* (si presenta nelle generalizzazioni e nei metodi generali); *incognita* (il suo valore si può calcolare considerando le restrizioni del problema); *“in relazione funzionale”* (relazione di variazione con altre variabili); *segno del tutto arbitrario* (si presenta nello studio delle strutture); *registro di memoria* (in informatica) (Usiskin, 1988).

In Malisani & Marino (2002) e Malisani & Spagnolo (2005) abbiamo constatato che gli alunni evocano spontaneamente le concezioni di variabile come: valore numerico, incognita, “cosa che varia”, anche in assenza di un'adeguata padronanza del linguaggio algebrico.

E' possibile che molte difficoltà che incontrano gli studenti nello studio dell'algebra provengano dalla costruzione inadeguata del concetto di variabile (Cfr. Chiarugi, I. *et alii*, 1995). Un approccio opportuno a questo concetto dovrebbe considerare le sue principali concezioni, le inter-relazioni esistenti tra loro e la possibilità di passare da una all'altra con flessibilità, in relazione alle esigenze del problema da risolvere.

L'analisi storica mette in risalto che le nozioni di incognita e di variabile come “cosa che varia” hanno un'origine e un'evoluzione totalmente differenti. Anche se entrambi i concetti si occupano di numeri, i loro processi di concettualizzazioni sembrano essere completamente diverse (Radford, 1996).

In Malisani (2002, 2005) abbiamo studiato l'aspetto relazionale-funzionale della variabile nel problem-solving, considerando i contesti semiotici dell'algebra e della geometria analitica. Abbiamo mostrato che si manifesta una certa interferenza della concezione di incognita su quella funzionale, nel contesto di una situazione problematica e in assenza di registri rappresentativi visuali. Abbiamo constatato anche che gli alunni trovano delle difficoltà per interpretare il concetto di variabile nel processo di traduzione dal linguaggio algebrico a quello naturale.

Il lavoro qui presentato fa parte dell'analisi statistica di questa sperimentazione, nella quale si tratta di verificare se la concezione di variabile come “cosa che varia” viene evocata, quando prevale la nozione di incognita nel contesto di una situazione problema.



Per effettuare questa ricerca abbiamo scelto l'equazione lineare in due variabili per due motivi: innanzitutto, perché consideriamo che rappresenta un punto nodale per fare scaturire le concezioni degli alunni sulle lettere come incognite o "cose che variano". In secondo luogo, questo tipo di equazione risulta un oggetto ben conosciuto dagli alunni, trattato sotto diverse ottiche: funzione lineare, equazione di una retta e componente dei sistemi lineari.

3 Metodologia della ricerca

A questo studio hanno partecipato 111 alunni di 16-18 anni del Liceo Sperimentale della città di Ribera (AG) – Italia. Il questionario proposto consta di quattro quesiti. In questo articolo presentiamo soltanto la risoluzione del primo problema:

Carlo e Lucia vincono al lotto la somma complessiva di €300. Sappiamo che Carlo vince il triplo del denaro scommesso, mentre Lucia il quadruplo del proprio.

- a) *Determina le somme di denaro che Carlo e Lucia hanno giocato. Commenta il procedimento seguito.*
 b) *Quante sono le possibili soluzioni? Motiva la tua risposta.*

In questo caso la variabile assume l'aspetto relazionale–funzionale nel contesto di una situazione problematica concreta. Si chiede anche di riflettere sull'insieme soluzione. Con questo quesito si pretende analizzare le strategie risolutive messe in atto e se la nozione di incognita interferisce con l'interpretazione dell'aspetto funzionale.

Abbiamo realizzato l'analisi a-priori del problema per determinare tutte le possibili strategie che gli alunni possono utilizzare. Abbiamo anche individuato i possibili errori che possono commettere gli studenti nell'applicare queste strategie.

Gli alunni hanno risolto la prova individualmente; non è stata permessa la consultazione di libri o di appunti. Il tempo concesso è stato di sessanta minuti.

In una tabella a doppia entrata "alunni/strategie", per ogni alunno si indicò con il valore 1 le strategie che esso utilizzò e con il valore 0 le strategie che non applicò. I dati sono stati analizzati in modo quantitativo utilizzando il software di statistica inferenziale CHIC 2000 (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) e l'analisi fattoriale delle corrispondenze attraverso il software S.P.S.S.

4 Analisi a-priori

Le principali variabili sperimentali determinate dall'analisi a-priori sono le seguenti:

AL1: L'alunno risponde al quesito.

AL2: Esibisce un procedimento in lingua naturale.

AL3: Esibisce un procedimento per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato.

AL4: Aggiunge un dato.

AL4.1: Aggiunge un dato dividendo la vincita a metà.

AL4.2: Aggiunge un dato considerando che entrambi i ragazzi vincono 300 €.

AL4.3: Aggiunge un dato considerando che le somme scommesse sono uguali.

AL5: Traduce il problema ad un'equazione di primo grado a due incognite.

AL7: Traduce il problema ad un'equazione di primo grado a due incognite e utilizza il metodo algebrico di "sostituzione in se stessa"⁽²⁾.

AL9: Cambia procedimento risolutivo, abbandonando quello pseudo-algebrico.

AL11: Considera, in modo esplicito o implicito, che il problema rappresenta una relazione funzionale.

AL13: Commette degli errori nella risoluzione dell'equazione e trova (o tenta di trovare) la soluzione unica.

AL14: Considera che tra x e y esiste una relazione di proporzionalità.

ALb1: L'alunno determina l'insieme soluzione.



ALb2: Mostra una soluzione particolare che verifica l'equazione.

ALb3: Mostra più soluzioni che verificano l'equazione.

ALb4: Considera esplicitamente le infinite soluzioni.

ALb5: Considera in modo esplicito che mancano dati per determinare la soluzione unica.

ALb6: Considera una pluralità di soluzioni (comprende ALb4 e ALb5) ⁽³⁾.

5 Ipotesi

| | |
|--|--|
| Se nel contesto di una situazione problema prevale la concezione di variabile come incognita | allora <u>non</u> viene evocato il suo aspetto relazionale-funzionale. |
| AL4, ALb2 | ~AL3, ~AL11, ~AL14, ~ALb3, ~ALb4, ~ALb5, ~ALb6 |

La concezione di variabile come incognita si mette in evidenza attraverso la variabile sperimentale AL4 “aggiunge un dato”. Questo è equivalente ad introdurre una nuova equazione per formare, con l'equazione del problema, un sistema di due equazioni in due incognite. La soluzione del sistema è una “soluzione particolare che verifica l'equazione del problema” (ALb2) ⁽⁴⁾.

L'aspetto relazionale-funzionale della variabile viene evocato se l'alunno esibisce un “procedimento per tentativi ed errori” (AL3), mediante il quale richiama la nozione di dipendenza tra le variabili. In questo modo, l'alunno “considera implicitamente o esplicitamente che il problema rappresenta una relazione funzionale” (AL11) o mette in evidenza, erroneamente, che “tra le variabili esiste una relazione di proporzionalità diretta” (AL14). Quindi l'alunno “mostra alcune soluzioni che verificano l'equazione” (ALb3) o “considera che il problema ha una pluralità di soluzioni” (ALb6) ⁽³⁾. Di conseguenza il “non evocare l'aspetto relazionale-funzionale della variabile” è equivalente alla negazione delle variabili sperimentali sopra descritte: ~AL3, ~AL11, ~AL14, ~ALb3, ~ALb4, ~ALb5, ~ALb6.

6 Analisi statistica implicativa (ASI)

6.1 Grafo implicativo

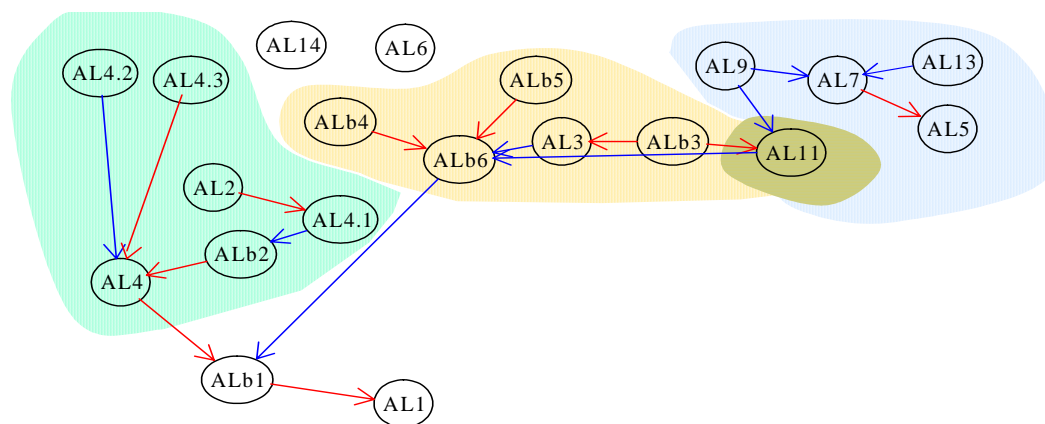


FIG.1: Grafo implicativo



Il grafico implicative (realizzato con il software CHIC) mostra, con percentuali del 95% e 99%, tre raggruppamenti ben definiti delle variabili sperimentali, messi in evidenza mediante le nuvole verde, gialla e celeste (la nuvola rigata gialla-celeste indica l'intersezione tra queste due nubi). I tre raggruppamenti si collegano direttamente o indirettamente con le variabili ALb1 “l'alunno determina l'insieme soluzione” e AL1 “l'alunno risponde al quesito”. Ad ogni raggruppamento corrisponde un tipo differente di strategia utilizzata dagli alunni:

- **Procedimento in lingua naturale** (nuvola verde): l'alunno aggiunge un dato considerando che le vincite sono uguali (generalmente dividendola a metà) o che le scommesse sono uguali⁽⁴⁾. In questo modo, l'allievo trasforma il quesito in un tipico problema aritmetico e lo risolve trovando soltanto una soluzione particolare che verifica l'equazione. Questo risultato viene confermato dai legami implicative tra le variabili sperimentali AL2, ALb2 ed AL4 (con le sue varianti AL4.1, AL4.2 ed AL4.3).
 Il procedimento in lingua naturale è il più utilizzato dagli alunni (Cfr. Tabella di frequenza nell'Appendice), conduce ad una soluzione unica e quindi la concezione di variabile predominante è quella di incognita.
- **Metodo per tentativi ed errori in lingua naturale o in linguaggio semi-formalizzato** (nuvola gialla): l'alunno che applica questa strategia generalmente assegna più valori ad una delle variabili (per esempio, la somma scommessa da Carlo) e trova i valori corrispondenti dell'altra variabile (la somma giocata da Lucia). In questo modo, l'allievo mostra alcune soluzioni che verificano le equazioni e/o considera che essa ha una pluralità di soluzioni, in altre parole, tiene conto generalmente in maniera implicita che il problema rappresenta una relazione funzionale. Il risultato descritto si ottiene dai legami implicative tra le variabili AL3, ALb3, AL11 e ALb6.
 Questo metodo conduce a più soluzioni, permette di evocare la dipendenza tra le variabili, ma non compare ancora una concezione forte dell'aspetto relazionale-funzionale.
- **Strategia pseudo-algebrica** (nuvola celeste): l'alunno traduce il testo del problema ad un'equazione di primo grado in due incognite ed applica il metodo di “sostituzione in se stessa”; in altre parole il procedimento scorretto che consiste nello scrivere una variabile in funzione dell'altra per sostituirla poi nell'equazione originale, ottenendo così un'identità⁽²⁾. Siccome l'alunno non riesce ad interpretare l'identità, cambia procedimento risolutivo abbandonando quello pseudo-algebrico o riprende la risoluzione dell'equazione effettuando alcuni errori per tentare di trovare la soluzione unica. Il risultato descritto si evince dai legami implicative tra le variabili sperimentali AL9, AL13, AL7 e AL5.
 E' interessante rilevare che se l'alunno abbandona questa strategia allora considera in modo implicito o esplicito che il problema rappresenta una relazione funzionale. Questo risultato è confermato dal legame implicative tra le variabili sperimentali AL9 ed AL11 che permette il collegamento tra i due procedimenti: per tentativi ed errori e pseudo-algebrico (nuvola rigata celeste-gialla).
 In ogni caso la strategia pseudo-algebrica non è molto utilizzata e soltanto in alcuni casi conduce alla soluzione corretta del problema.

6.2 Falsificazione dell'ipotesi

Consideriamo

p: nel contesto di una situazione problema prevale la concezione di variabile come incognita (variabili sperimentali AL4 e ALb2);

q: viene evocato il suo aspetto relazionale funzionale (variabili sperimentali AL3, AL11, AL14, ALb3, ALb4, ALb5 e ALb6).

L'ipotesi formulata è equivalente a:



$p \rightarrow \sim q$ che, dal punto di vista logico, è equivalente a $\sim(p \wedge \sim(\sim q))$ oppure $\sim(p \wedge q)$

Quindi per falsificare questa ipotesi basta dimostrare l'intersezione vuota tra le variabili sperimentali di p e q , in altre parole:

p corrisponde al *procedimento in lingua naturale* nel quale prevale la concezione di variabile come incognita; q è equivalente al *metodo per tentativi ed errori* nel quale predomina l'aspetto relazionale-funzionale della variabile.

Dal grafico implicativo si evince precisamente che gli insiemi delle variabili sperimentali corrispondenti a p (nuvola verde) e a q (nuvola arancione) sono disgiunti. Questo risultato permette di falsificare l'ipotesi formulata.

6.3 Profilo degli alunni

Un aspetto particolarmente importante che emerge dall'analisi precedente è una certa corrispondenza tra le strategie risolutive utilizzate dagli alunni e le concezioni di variabile come incognita e "cosa che varia". Per approfondire questi risultati adoperiamo una metodologia particolarmente efficace: quella di introdurre delle variabili supplementari nella componente allievi. Si tratta, in altre parole, di inserire un profilo di allievo che soddisfi alcune caratteristiche ritenute importanti dal ricercatore. Nel caso specifico della presente analisi abbiamo definito cinque profili:

- **NAT:** questo profilo corrisponde all'alunno che esibisce un procedimento in lingua naturale. Quindi egli aggiunge un dato considerando che le vincite sono uguali (generalmente dividendola a metà) o che le scommesse sono uguali⁽⁴⁾ e risolve il problema trovando soltanto una soluzione particolare che verifica l'equazione. Questo profilo è caratterizzato dalla presenza delle seguenti variabili sperimentali: AL2, AL4 (AL4.1, AL4.2 o AL4.3) e ALb2.
- **FUNZ:** corrisponde all'alunno che applica una strategia per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato. Egli generalmente assegna più valori ad una delle variabili e trova i valori corrispondenti dell'altra variabile mostrando alcune soluzioni che verificano le equazioni e/o considerando che essa ha una pluralità di soluzioni. Le variabili sperimentali che descrivono questo profilo sono: AL3, AL11, ALb3, ALb4, ALb5 e ALb6.
- **PALG1:** corrisponde allo studente che utilizza il procedimento pseudo-algebrico. Egli traduce il testo del problema ad un'equazione di primo grado in due incognite ed applica il metodo di "sostituzione in se stessa"⁽²⁾. Quando arriva all'identità non riesce a darle un'interpretazione adeguata e allora riprende la risoluzione dell'equazione effettuando alcuni errori di tipo sintattico per tentare di trovare la soluzione unica. Questo profilo è caratterizzato dalla presenza delle variabili sperimentali: AL5, AL7, AL13, e ALb2.
- **PALG2:** è una variazione del profilo PALG1, in quanto l'alunno che arriva all'identità cambia procedimento risolutivo abbandonando quello pseudo-algebrico. Le variabili sperimentali che descrivono questo profilo sono le seguenti: AL3, AL5, AL7, AL9, AL11, e ALb3.
- **ALG:** corrisponde all'alunno che applica un procedimento algebrico. Egli traduce il problema ad un'equazione di primo grado in due incognite, considera in modo implicito o esplicito che essa rappresenta una relazione funzionale e quindi che è verificata da una pluralità di soluzioni. Le variabili sperimentali implicate sono: AL5, AL11, ALb4 e ALb6.



6.4 Albero gerarchico

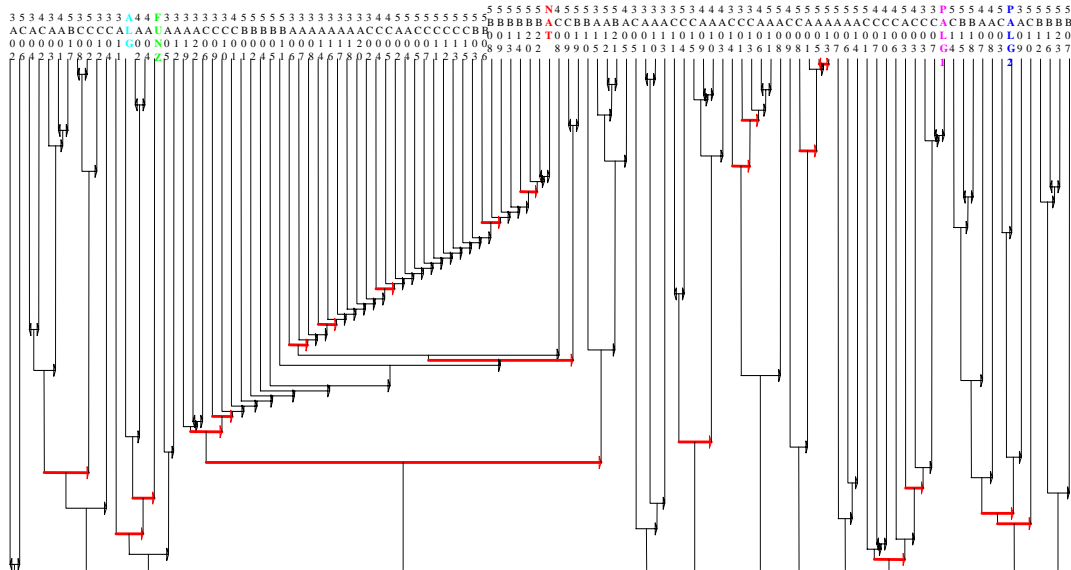


FIG. 2 : Albero gerarchico

Nell'albero gerarchico si osserva un raggruppamento di variabili molto significativo che implica il profilo NAT evidenziato in colore rosso. A destra di NAT si rileva un piccolo insieme di variabili che appartengono allo stesso raggruppamento. Queste variabili corrispondono agli alunni che hanno seguito il procedimento descritto in NAT, trovando una soluzione del problema, ma dovendo rispondere in seguito sulle possibili soluzioni, hanno considerato che l'equazione è soddisfatta da una pluralità di soluzioni.

Si osservano anche due piccoli gruppi che implicano i profili PALG1 (evidenziato in colore fucsia) e PALG2 (in colore blu elettrico). Non ci sono implicazioni significative, invece, per le variabili supplementari ALG (in turchese) e FUNZ (in verde brillante).

Quindi il profilo descritto in NAT è il più significativo perché rappresenta la strategia più utilizzata dagli alunni.



7 Analisi fattoriale delle corrispondenze (AFC)

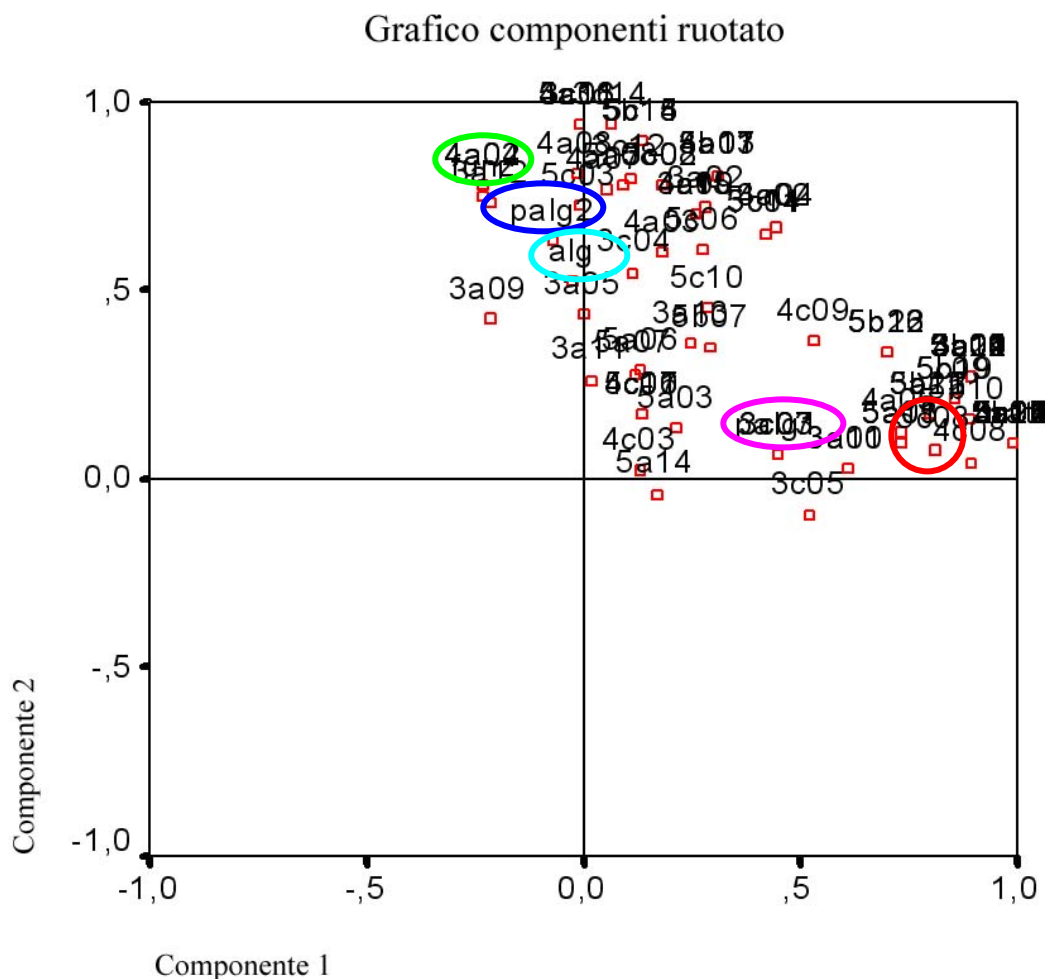


FIG. 3 : Analisi fattoriale 1-2

Dall'analisi fattoriale si osserva che, rispetto alla componente orizzontale, gli individui supplementari NAT (cerchiata in rosso) e PALG1 (evidenziata in fucsia) assumono un ruolo determinante e lo caratterizzano fortemente.

I profili ALG (cerchiata in turchese), PALG2 (in blu elettrico) e FUNZ (in verde) formano una nuvola che caratterizza fortemente la componente verticale. La variabile supplementare PALG2 è molto vicino a FUNZ perché l'alunno che abbandona il procedimento pseudo-algebrico, generalmente adotta quello descritto in FUNZ.



Le strategie vincenti sono precisamente quelle descritte nei profili ALG, PALG2 e FUNZ che portano alla pluralità di soluzioni, mentre NAT e PALG1 conducono alla soluzione unica. Questo trova una forte corrispondenza con le diverse concezioni del concetto di “variabile”. Quindi l’asse orizzontale rappresenta la concezione di “variabile” come *incognita*, l’asse verticale, invece, riproduce il suo aspetto *relazionale-funzionale*. Questi risultati permettono nuovamente di validare l’ipotesi.

8 Conclusioni

Il grafico implicativo mette in evidenza le strategie risolutive utilizzate dagli alunni per risolvere il problema:

- **procedimento in lingua naturale**: è il più utilizzato dagli alunni e conduce ad una soluzione unica. La concezione di variabile predominante è quella di incognita.
- **metodo per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato** (generalmente aritmetico): conduce a più soluzioni. Viene evocata la dipendenza tra le variabili, ma non compare ancora una concezione forte dell’aspetto relazionale-funzionale.
- **strategia pseudo-algebrica**: è poco utilizzata dagli alunni e soltanto in alcuni casi conduce alla soluzione corretta del problema.

Per approfondire i risultati ottenuti abbiamo introdotto delle variabili supplementari nella componente allievi. Questi profili rappresentano gli individui supplementari che mettono in evidenza le caratteristiche fondamentali dell’analisi a-priori. Essi sono i seguenti:

| VARIABILI SUPPLEMENTARI | STRATEGIE |
|-------------------------|--|
| NAT | in lingua naturale |
| FUNZ | per tentativi ed errori in lingua naturale e/o in linguaggio semi-formalizzato |
| PALG1 | pseudo-algebrica + risoluzione dell’equazione con errori di tipo sintattico |
| PALG2 | pseudo-algebrica + altra strategia |
| ALG | algebrica |

L’albero gerarchico fa notare che il profilo NAT è il più significativo perché rappresenta la strategia più utilizzata dagli alunni. Collegato a questo raggruppamento si osserva anche un piccolo insieme di alunni che ha il profilo descritto in NAT, ma che successivamente ha effettuato il passaggio dalla singola soluzione ad una pluralità di soluzioni dell’equazione lineare.

Dall’analisi fattoriale si osserva che la componente orizzontale è caratterizzata dai profili NAT e PALG1, mentre la componente verticale da FUNZ, PALG2 e ALG. Quindi si rileva una forte corrispondenza tra le componenti e le concezioni di variabile: la componente orizzontale rappresenta la nozione incognita, mentre quella verticale raffigura l’aspetto di “cosa che varia”.

I risultati ottenuti, sia con l’analisi implicativa sia con l’analisi fattoriale, permettono di falsificare l’ipotesi formulata, cioè: “Se nel contesto di una situazione problema prevale la concezione di variabile come incognita allora non viene evocato il suo aspetto relazionale-funzionale”.

E’ interessante osservare che in alcuni casi, pur prevalendo la nozione di incognita, si verifica il passaggio dalla singola soluzione ad una pluralità di soluzione nell’equazione lineare. Da qui emerge una questione importante: “Questo passaggio coincide o no con il passaggio dalla concezione di incognita a quella relazionale-funzionale?”. In questa sperimentazione non abbiamo trovato le risposte. Per approfondire questa



problematica abbiamo effettuato una nuova ricerca sperimentale di tipo qualitativo, sottoponendo lo stesso questionario a coppie di alunni.

Questa ricerca mette in evidenza le relazioni tra l'Analisi Statistica Implicativa (ASI) e l'Analisi Fattoriale delle Corrispondenze (AFC) per falsificare le ipotesi di ricerca in Didattica delle Matematiche. L'analisi implicativa mette evidenza le strategie applicate dagli studenti e l'analisi fattoriale mette in risalto la corrispondenza tra le componenti principali e le concezioni sulla variabile.

Note:

- (1) La tesi: *“Il concetto di variabile nel passaggio dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico in contesti semiotici diversi”* per ottenere il grado di Dottore di Ricerca è stata effettuata da Elsa Malisani sotto la supervisione del Prof. Filippo Spagnolo, sarà pubblicata prossimamente sul sito Internet <http://dipmat.math.unipa.it/~grim>.
- (2) Abbiamo chiamato “procedimento di sostituzione in se stessa” il metodo scorretto che consiste nello scrivere una variabile in funzione dell'altra per sostituirla poi nell'equazione originale ottenendo così un'identità. In altre parole, il metodo di sostituzione utilizzato per risolvere i sistemi di equazioni viene applicato ad una singola equazione.
- (3) Nel presente lavoro si preferisce utilizzare il termine “**pluralità** di soluzioni” al vocabolo “**infinite** soluzioni”, perché non sono state considerate le possibili connotazioni della parola “infinito”. In ogni modo, abbiamo definito la variabile sperimentale ALb4 per tenere conto dei casi in cui l'alunno considera in modo esplicito l'esistenza di infinite soluzioni.
- (4) La variabile sperimentale **AL4** “aggiunge un dato” considera due possibilità: vincite uguali o scommesse uguali (AL4.3). Il primo caso tiene conto di altri due: la vincita si divide a metà (AL4.1) o entrambi i ragazzi vincono 300 €(AL4.2).
“Aggiungere un dato” è equivalente ad introdurre una nuova equazione per formare, con l'equazione del problema $3x + 4y = 300$ o parte di essa, un sistema di due equazioni in due incognite. Quindi ad ogni caso corrisponde un sistema.
 - *“La vincita di 300 € si divide a metà”* (AL4.1) è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 300 \\ 3x = 4y = 150 \end{cases}$$
 - *“La vincita è uguale a 300 € per entrambi i ragazzi”* (AL4.2) corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} 3x = 300 \\ 4y = 300 \end{cases}$$
 - *“Le scommesse sono uguali”* (AL4.3) equivale al sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 300 \\ x = y \end{cases}$$



Bibliografia

- Arzarello, F., Bazzini, L. e Chiappini, G., 1994. L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.
- Chiarugi, I., Fracassina, G., Furinghetti, F. & Paola, D., 1995. Parametri, variabili e altro: un ripensamento su come questi concetti sono presentati in classe. L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 18B, 1, pp. 34-50.
- Escofier, B. & Pages, J., 1990. Analyses factorielles simples et multiples (objectifs, méthodes et interpretation). Paris : Dunod.
- Gras, R. et alii, 1996. L'implication statistique (Nouvelle méthode exploratoire de données. Grenoble: La Pensée Sauvage.,
- Gras, R., 1997. Metodologia di analisi di indagine. Quaderni di Ricerca Didattica, 7, pp. 99-109.
- Gras, R., 2000. I fondamenti dell'analisi statistica implicativa. Quaderni di Ricerca Didattica, 9, pp. 189-209.
- Malisani, E., 2002. The notion of variable in semiotic contexts different. Proceedings of the International Conference "The Humanistic Renaissance in Mathematics Education". University of Palermo, Italia pp.245-249.
- Malisani E., 2005. The notion of variable: some meaningful aspects of algebraic language. In A. Gagatsis, F. Spagnolo, Gr. Makrides & V. Farmaki (eds.), Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education (MEDCONF 2005), University of Palermo, Italia. Vol. II, pp. 397-406.
- Malisani, E. & Marino, T., 2002. Il quadrato magico: dal linguaggio aritmetico al linguaggio algebrico. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), Supplemento al n. 10*, Palermo– Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno10.htm>- ISSN on-line 1592-4424.
- Malisani, E. & Spagnolo, F., 2005. Difficulty and obstacles with the concept of variable. *Proceedings CIEAEM 57*, pp. 226-231. Piazza Armerina, Italia.
- Matz, M., 1982. Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. e Brown, J.S. (eds.), *Intelligent Tutoring Systems*, London: Academic Press.
- Radford, L., 1996. The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: historical remarks from a didactic perspective. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer, pp. 39 – 53.
- Spagnolo F., 1998. *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*. Firenze: La Nuova Italia.
- Spagnolo F., 2002. L'analisi quantitativa e qualitativa dei dati sperimentali. *Quaderni di Ricerca in Didattica del Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche (G.R.I.M.), Supplemento al n. 10*, Palermo– Pubblicazione on-line su Internet nel sito <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno10.htm>- ISSN on-line 1592-4424.
- Usiskin, Z., 1988. Conceptions of school algebra and uses of variables. In Coxford A.F. e Shulte A.P. (eds.), *The ideas of Algebra, K-12*. Yearbook, NCTM, Reston, Va, pp. 8-19.
- Wagner, S., 1981. An Analytical Framework for Mathematical Variables. *Proceedings of the Fifth PME Conference*, pp. 165-170. Grenoble, Francia.
- Wagner, S., 1983. What are These Things Called Variables? *Mathematics Teacher*, October, pp. 474-479.



Appendice: Tabella di frequenze

| Variabile | Frequenza assoluta | Frequenza relativa | Percentuale | Scarto |
|-----------|--------------------|--------------------|-------------|--------|
| AL1 | 106.00 | 0.95 | 95 | 0.21 |
| AL2 | 44.00 | 0.40 | 40 | 0.49 |
| AL3 | 34.00 | 0.31 | 31 | 0.46 |
| AL4 | 71.00 | 0.64 | 64 | 0.48 |
| AL4.1 | 53.00 | 0.48 | 48 | 0.50 |
| AL4.2 | 11.00 | 0.10 | 10 | 0.30 |
| AL4.3 | 13.00 | 0.12 | 12 | 0.32 |
| AL5 | 27.00 | 0.24 | 24 | 0.43 |
| AL6 | 4.00 | 0.04 | 4 | 0.19 |
| AL7 | 13.00 | 0.12 | 12 | 0.32 |
| AL9 | 9.00 | 0.08 | 8 | 0.27 |
| AL11 | 34.00 | 0.31 | 31 | 0.46 |
| AL13 | 8.00 | 0.07 | 7 | 0.26 |
| AL14 | 3.00 | 0.03 | 3 | 0.16 |
| ALb1 | 99.00 | 0.89 | 89 | 0.31 |
| ALb2 | 63.00 | 0.57 | 57 | 0.50 |
| ALb3 | 33.00 | 0.30 | 30 | 0.46 |
| ALb4 | 25.00 | 0.23 | 23 | 0.42 |
| ALb5 | 13.00 | 0.12 | 12 | 0.32 |
| ALb6 | 36.00 | 0.32 | 32 | 0.47 |

Summary

The introduction of the concept of variable represents the critical point of transition from the arithmetic thought to the algebraic thought. This concept is complex because it is used with different meanings in different situations.

This work intends to study the relational-functional aspect of the variable in the problem-solving. We want to analyse if the unknown notion interferes with the interpretation of the functional aspect. The study takes place to Italian High School (students 16-18 age).

This work puts in evidence the relations between the Statistical Implicative Analysis (ASI) and the Factorial Analysis of the Correspondences (AFC) to falsify hypotheses of didactic research in mathematics.

The implicative analysis puts in evidence the strategies of the students; the factorial analysis puts in contrast the correspondence between the principal components and the conceptions on the variable.