"Quaderni di Ricerca in Didattica", n. 19, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

UN NUOVO MODELLO INTERPRETATIVO DI ALCUNI FENOMENI ACUSTICI: IL SISTEMA FORMALE CIRCOLARE ARMONICO

(CIRCULAR HARMONIC SYSTEM – C.HA.S.)

Alfredo Capurso alfredocapurso@libero.it

SOMMARIO

Questo articolo tratta i risultati di una ricerca sul suono, in particolare sulla corda vibrante e sulle combinazioni di frequenze da cui hanno origine i *battimenti*.
Obbiettivo primo della ricerca è stato un *ordinamento scalare di suoni* che tenesse conto delle divergenti *parziali armoniche* 3 e 5, un modello che risultasse attendibile tanto sul piano teorico che su quello pratico.
Parallelamente serviva una regola atta a compensare e gestire l'inarmonicità della corda, in parte responsabile dell'innalzamento delle frequenze parziali, da cui deriva la necessità di "allargare" anche il rapporto 2:1 dell'intervallo di ottava.
Il modello chas congiunge gli effetti delle frequenze parziali e allarga tutti gli intervalli di scala in reciproca funzione.
Ma come ordinare una scala di frequenze in modo proporzionale senza la ragione 2:1?
L'autore, confrontando sistematicamente le *frequenze dei battimenti*, ha potuto rilevare una nuova "costante di differenza", ossia un *battimento* in proporzione 1:1 sulle parziali armoniche 3 e 4.
L'ordinamento di suoni qui descritto rappresenta quindi un *insieme di frequenze proporzionali in funzione di battimenti sincronici*, un sistema dinamico stabile e perfettamente risonante.

ABSTRACT

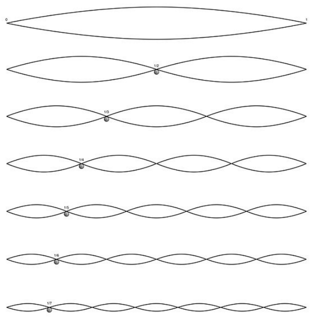
This article presents the results of research into sound, specifically vibrating strings and the frequency combinations which give rise to *beats*.
The main aim of the research was to define a *sound scale* that takes account of the divergent *partials* 3 and 5, and to construct a reliable model in both theoretical and practical terms.
At the same time there was a need for an exact rule able to counterbalance and manage the chord inharmonicity partly responsible for increases in partial frequencies, which give rise to the need to "stretch" the 2:1 octave interval ratio.
The chas model conjoins the scale effects of partial frequencies and stretches all the scale intervals to place them in reciprocal function.
The question was how to order a scale of frequencies in proportional terms without the 2:1 ratio.
Systematic analysis of *beats frequencies* revealed a new "difference constant", that is, a 1:1 *beats* ratio on partials 3 and 4.
The sound scale described below thus constitutes a proportionate frequency set as a function of synchronic beats: a dynamic, stable and perfectly resonant system.

1.0 - INTRODUZIONE

In questo articolo viene descritto un nuovo approccio al temperamento della scala semitonale e i risultati numerici conseguiti. Una linkografia di siti selezionati[1] consentirà al lettore più esigente un agevole approfondimento di rilevanti aspetti storici e teorici, qui riportati parzialmente col solo scopo di contestualizzare gli esiti del modello chas.
La corda, come tanti aggregati particellari, è un insieme materico compatto ed elastico; il *suono*, potremmo dire, è l’effetto dell’energia che l’attraversa.
La corda vibrante si rielabora e rilascia l’energia in esubero, il *suono*, con cui traccia e trasferisce la memoria relativa alle sue più intrinseche caratteristiche strutturali. Così la materia-corda può interferire con altra materia vibrante.
Comprendere il comportamento della corda e l’origine dei *battimenti* ci introdurrà alle problematiche inerenti l’ordinamento dei suoni in scala.

1.1 - I MODI DELLA CORDA VIBRANTE

La corda fissata alle due estremità vibra secondo i suoi “automodi”, disegnando prima una doppia C, poi due S e poi ancora figure sempre più complesse, vivido esempio naturale di forme autosimili, determinate da un crescente numero di *ventri* e di *nodi*.



Il numero di *nodi* descrive quindi le lunghezze d’onda a cui una corda può vibrare.
Dato che il numero di nodi può solo essere un numero intero, successive lunghezze d’onda sono tra loro in rapporto 1:2, 1:3, 1:4,…1:n, un preciso ordine naturale denominato “serie armonica”, una serie infinita descritta in termini scientifici nel ’700 dal fisico Joseph Sauveur (1653-1716) [2].
Poiché il valore della frequenza è in rapporto inverso alla lunghezza d’onda, una corda vibrante emette una prima frequenza cosiddetta “fondamentale” insieme a infinite altre frequenze, di sempre minore intensità, cosiddette *parziali* e relative ai multipli interi della frequenza fondamentale. Quindi, se consideriamo un primo suono di frequenza fondamentale **1**, in teoria dalla stessa corda avremo simultaneamente una seconda frequenza *parziale* **2**, una terza frequenza *parziale* **3** ecc.
La semplice *combinazione di due suoni* si tradurrà quindi in un complesso confronto tra due frequenze fondamentali e le relative frequenze parziali.

1.2 – COMBINAZIONI DI SUONI E BATTIMENTI

Due suoni con *lunghezze d’onda* in rapporto 2:1, o 3:2, o 5:4 ecc., rapporti formati da numeri interi piccoli, possono in teoria fondersi perfettamente dacché i *nodi* delle rispettive onde possono sovrapporsi.
Per contro, due suoni di frequenza 1.25 (5:4) e 1.5 (3:2) non potranno moltiplicarsi nella stessa scala senza produrre delle sfasature nodali. Infatti la serie di suoni derivati dalla

ragione in rapporto 3:2 (intervallo di quinta) non coinciderà con i valori derivati dal rapporto 5:4 (intervallo di terza) poiché tali rapporti si fondano sui numeri primi 2, 3 e 5, valori che non hanno potenze in comune.
In tre righe troviamo un'immediata riprova (evidenziata in rosso e blu):

VALORI-FREQUENZA ***5/4** **1** **1,25** **1,5625** **1,9531**
SUONI IN SCALA 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
TERZA

VALORI-FREQUENZA ***2/1** **1** **2**
SUONI IN SCALA 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

VALORI-FREQUENZA *3/2: (4/3) **1** **1,125** **1,265625** **1,5** **1,6875**
SUONI IN SCALA 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

La terza pura (5:4) non raggiunge il rapporto (2:1) di ottava: 1*(5:4)*(5:4)*(5:4) = 1,9531
La quinta pura (3:2) e la quarta pura (4:3) eccedono la terza: 1*(3:2)/(4:3)*(3:2)/(4:3) = 1,265625

Le *differenze numeriche* dai rapporti aritmetici giusti daranno luogo al cosiddetto *battimento,* percepibile come una variazione d'intensità molto simile ad una pulsazione con una precisa frequenza.
Infatti la sovrapposizione di due ventri farà sommare le ampiezze dei due suoni (interferenza costruttiva), l'opposizione di due ventri farà sottrarre le rispettive ampiezze (interferenza distruttiva). Tra due suoni con frequenze vicine, la frequenza del battimento sarà data dalla differenza tra i due valori-frequenza[3].
In generale, quanto maggiore è la distanza da un teorico punto di coincidenza di due frequenze *fondamentali* o *parziali*, tanto più veloce sarà la frequenza del battimento.
Di fatto il battimento, che il nostro apparato uditivo percepisce come un vero e proprio ritmo, riporta con assoluta fedeltà la sovrapposizione e l'opposizione di due ventri, e quindi le *precise proporzioni* relative a due diverse lunghezze d'onda.

1.3 – LE PROPORZIONI ARMONICHE – CONSONANZA E DISSONANZA

Si ritiene sia stato Pitagora, nella nostra area geografica, a trarre le prime proporzioni armoniche relative alla *lunghezza della corda vibrante*, la proporzione 1:2 per l'intervallo di ottava e 2:3 per l'intervallo di quinta.
I numeri 1 e 2, l'Unità e la Diade, davano prova di potersi fondere in un rapporto perfetto e chiudevano l'intervallo cosiddetto *dià pason* (attraverso tutto).
All'interno della Scuola Pitagorica, queste proporzioni musicali confermavano l'idea di un Universo tutto "consonante" e traducibile attraverso la relazione tra numeri interi piccoli.
L'intervallo di ottava, teorizzato in rapporto 2:1, è da allora considerato come il rapporto di massima consonanza.
La storia della musica è stata sempre influenzata – ancora si dibatte sul quanto e sul come - da fattori di "consonanza" e "dissonanza" armonica[4]. Questo perché i diversi

gradi di consonanza caratterizzano le combinazioni di suoni in scala e inducono nell’ascoltatore sensazioni e stati d’animo differenti. In verità potremmo invertire i termini e dire che le sensazioni dell’ascoltatore definiscono i gradi di consonanza tra due suoni. Diremo che, in generale, “consonanza“ è per l’ascoltatore sinonimo di quiete o rilassamento, come “dissonanza” è sinonimo di turbolenza o tensione, riconducendoci così alla dicotomia tra un principio statico e uno dinamico.
Come in presenza di un prodotto antinomico, i fattori “consonanza” e “dissonanza” hanno dato luogo a diversi approcci e distinto teorie riguardanti l’Armonia e le scale musicali.

1.4 - LE SCALE MUSICALI

Due evidenze, l’impossibilità di combinare in scala i rapporti derivanti da numeri primi e la massima *consonanza* derivante dalla teorica coincidenza dei *parziali* 2, 3 e 5 (e dei relativi rapporti 2:1, 3:2 e 5:4) hanno severamente condizionato l’elaborazione di una solida teoria del temperamento.
Con i semplici rapporti armonici di ottava e di quinta i Pitagorici poterono montare la prima scala cosiddetta diatonica, la successione di 7 note, pietra fondante del nostro sistema musicale.
Nei secoli successivi, con il contributo di insigni matematici quali Archita, Filolao, Didimo, Tolomeo, vennero adottati i rapporti semplici relativi ad altri intervalli. Così fu possibile ordinare una scala cosiddetta naturale[5], formalizzata nel ‘500 da Gioseffo Zarlino[6], costruita sui rapporti 2:1, 3:2, 4:3, 5:4 e 6:5, per i rispettivi intervalli di ottava, quinta, quarta, terza maggiore e terza minore.
Già nell’ XI secolo, giunti alla polifonia e all’uso di complesse combinazioni di suoni, si era fatta pressante la questione ancora oggi dibattuta: come ottenere che tutti gli accordi risultino melodiosi?

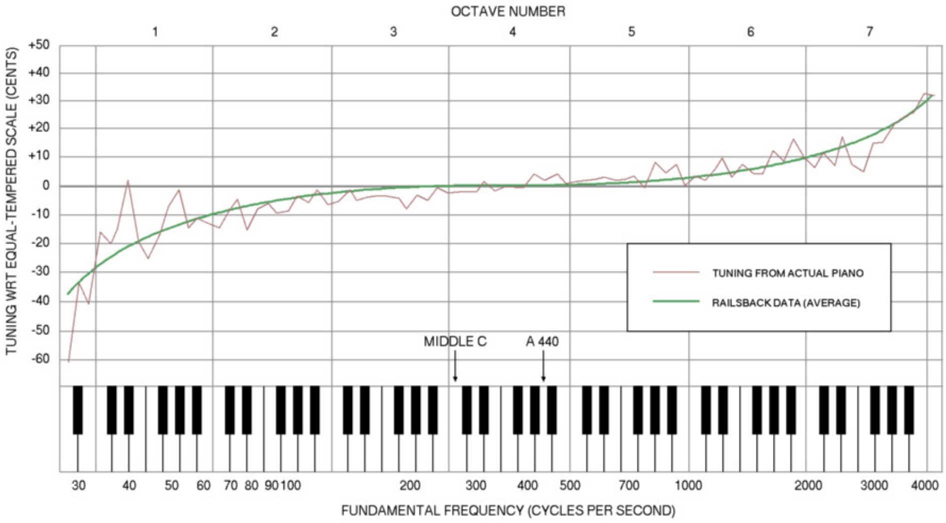
1.5 - I TEMPERAMENTI E LO STATO DELL’ARTE

Le concezioni melodiche e armoniche delle diverse epoche hanno influenzato la ricerca di nuovi temperamenti, tesi di volta in volta alla corrispondenza tra nuovi stili compositivi[7] e più larghi orizzonti sonori. Così accadde con la formalizzazione della musica tonale.
Spostarsi da un rapporto “puro” comportava una perdita di consonanza, favorire un rapporto puro rispetto ad un altro causava la forte dissonanza di almeno un intervallo, per questo detto “quinta del lupo”. Non restava quindi che calcolare i valori-frequenza in quella che oggi potrebbe definirsi la “logica del minor danno” evitando, per quanto possibile, quelle *differenze* di scala responsabili dei *battimenti*.
All’interno dell’ottava “pura”, la scala inizialmente calcolata in funzione del rapporto 3:2 (Temperamento Pitagorico), fu riordinata in funzione 5:4 (Temperamento Mesotonico), per giungere ai più svariati temperamenti irregolari del XVII secolo che, mantenendo fermo il rapporto 2:1, hanno teso ad agevolare le modulazioni in tutte le tonalità. Oggi si contano più di cento temperamenti, alcuni cosiddetti “storici”, per scale che in un’ottava racchiudono da 12 a 54 intervalli[8].
Il sistema di riferimento attuale, elaborato alla fine del ‘600, preserva l’ottava pura e spalma i cosiddetti comma, ovvero le *differenze* prodotte dai rapporti 3:2 e 5:4, su 12 semitoni in parti uguali.

Tale temperamento, per questo detto "Equabile", introduce una sorta di "compromesso" e moltiplica una prima frequenza e le successive per 2^(1/12) così che la 1ma e la 13ma frequenza, nella combinazione 0-12, risultino in rapporto 1:2.
La scala unitaria di "valori-suono" è così formata da numeri naturali multipli di 2 e per la prima volta da numeri algebrici, in una progressione logaritmica che rievoca la "spira mirabilis" descritta da Jakob Bernoulli[9] e può restituire il componente 5^(1/2) della "sezione aurea" (vedi paragrafo 4.3).
E' ancora aperta la diatriba tra chi sostiene e chi disprezza questa soluzione. La cosa comunque certa è che tutte le *differenze* sottostanno al valore parziale 2, una condizione che oggi appare arbitraria.
A questo proposito è necessario considerare i risultati di più recenti studi che descrivono un fenomeno correlato alla rigidità della corda e denominato "inarmonicità".

1.6 – INARMONICITA' DELLA CORDA

Col termine *inarmonicità* si descrive il fenomeno di *scostamento delle frequenze parziali* rispetto ai valori naturali della serie armonica. La rigidità della corda è una delle cause di questo fenomeno.
Per calcolare il coefficiente di inarmonicità della corda si mettono in relazione la sua lunghezza, il diametro, la densità e la tensione. Questo fenomeno, scoperto solo nel secolo passato, comporta in pratica la necessità di "allargare" (Inglese: stretch) anche il rapporto 2:1 dell'ottava.
O.L. Railsback [10] ha rilevato nel pianoforte la curva media di scostamento dal rapporto 2:1; questa curva cresce dai suoni bassi verso i medi, dove il grado di inarmonicità è lieve, per aumentare sempre più verso gli acuti.



- CURVA RAILSBACK -

Il fatto che i parametri relativi alla corda varino in ogni strumento obbligherà a correggere qualunque ordine teorico di frequenze in scala. Ciò ha probabilmente causato una battuta d'arresto nella ricerca di un temperamento semitonale che potesse superare i limiti, in termini di logica ed efficienza, del Temperamento Equabile.
Nel paragrafo 4.2 vedremo che i valori di scostamento dell'ottava chas sono in pacifica analogia con l'andamento di questa curva.

2.0 - L’APPROCCIO DEL MODELLO CHAS – DAL SEMITONO AL MICROTONO

Abbiamo compreso perché i rapporti puri tra numeri interi piccoli determinano sonorità consonanti.
Di contro, una scala semitonale in funzione del rapporto 3:2 procura valori/frequenza troppo alti per gli intervalli di terza e di ottava, così come la ragione 5:4 procura valori troppo bassi per le quinte e le ottave (vedi paragrafo 1.2). E’ come dire: quinte e terze giuste non giovano all’ottava.
Resta così da capire in quale logica l’ottava “pura” possa giovare per le quinte e le terze.
Abbiamo poi visto che la rigidità della corda è comunque causa di uno scostamento delle frequenze di scala dai rapporti puri (vedi paragrafo 1.6).
Si pongono di conseguenza due interrogativi.

- Quanto è corretto teorizzare l’ottava, ossia il primo parziale, in rapporto 2:1?
- Quale modello di temperamento è oggi attendibile nella teoria ed effettivamente applicato nella pratica dell’accordatura?

In altre parole, se il Temperamento Equabile per un verso trova un compromesso tra i rapporti 3:2 e 5:4, per altro verso impernia la suddivisione delle frequenze sull’ottava “pura”, vale a dire sul rapporto 2:1, una ragione teorica che non trova né un riscontro logico né uno pratico.
In tale contesto il modello chas, pur muovendo dalla tradizionale scala semitonale, innova la teoria e la prassi dell’accordatura, lasciando indietro un antico dogma e ammettendo la “naturalità” di un battimento anche per l’ottava. Come gli intervalli di quinta e di terza, anche l’intervallo di ottava può e deve di fatto essere temperato, cosicché ora la necessità è quella di coniugare i suoni parziali 2, 3 e 5 in una nuova forma di insieme.
In questo modello le *differenze*, ossia i battimenti, rappresentano il vero potenziale.
Un *insieme* di suoni in scala, semitonale o di altro genere, può essere straordinariamente risonante perché forte di un potenziale di *battimenti proporzionali*, una dote che ogni suono, ogni elemento parte dell’insieme può appieno condividere.
L’idea di purezza non è più tratta da una singola combinazione o da un “rapporto puro”, ma da un *insieme-forma*, puro in quanto *perfettamente congruo e coeso*.
I suoni fondamentali di scala cedono tutti una piccola parte del loro valore parziale “puro” a favore di un insieme armonico e dinamico, in quanto frutto di una naturale e intrinseca correlazione tra frequenze e battimenti.
Concettualmente il modello si pone su un piano trans-culturale e risponde ad una nuova urgenza comparsa nello scenario musicale contemporaneo, quella di eseguire un algoritmo in grado di dare forma alle più diverse strutture sonore microtonali. Per lo sviluppo di nuovi composti musicali, il modello offre un corretto esempio di logica ordinamentale e un campione di proporzionalità da cui poter trarre una varietà infinita di nuove combinazioni sonore.

3.0 - DESCRIZIONE DEL MODELLO CHAS

Il modello chas si affranca da due presupposti arbitrari, cioè che il modulo di scala debba essere di 12 semitoni e che l’ottava, il 12^{mo} semitono, debba essere in ragione doppia.
Il sistema muove da queste considerazioni:

Punto primo: *l’intervallo “puro” è condizione non necessaria*; infatti lievi scostamenti delle frequenze dai rapporti armonici puri non disturbano l’orecchio. Peraltro la rigidità della corda vibrante causa un fattore di *inarmonicità* (vedi paragrafo 1.6) e innalza i suoni *parziali* che mai potremo calcolare in ragione pura.
Punto secondo: le *differenze* si traducono in *battimenti* (vedi paragrafo 1.2) e questi caratterizzano l’eufonicità di due o più suoni simultanei.
Le *frequenze dei battimenti* forniscono un’*esatta nozione ritmica* e questa descrive l’effetto delle combinazioni di suoni fondamentali e parziali *nel tempo*, quindi *una ragione proporzionale deve valere per le frequenze come per le differenze* tra i giusti valori parziali della serie armonica e i reali valori di scala.
Punto terzo: *un modulo di 12 semitoni è condizione non sufficiente*, basti qui notare che il valore armonico 3 definisce un suono posto oltre il 12mo semitono e precisamente il suono del semitono 19. Peraltro, distribuendo i comma all’interno di un’ottava pura, le *differenze* degli intervalli più ampi di un’ottava si replicheranno sempre in ragione 2 (vedi paragrafo.4.3).
Punto quarto: *è necessario*[11] *un doppio modulo di 12 semitoni*. La doppia ottava attribuisce all’insieme scalare la *qualità intermodulare*. Dal secondo grado minore al grado infinito, tutti gli intervalli possono così trovare una loro identità.
Il processo di modellizzazione di questa scala si sviluppa quindi su questi principi fondamentali:
la scala di suoni rappresenta un *sistema-insieme*, dinamico poiché descritto nel *tempo* dall’esatta scansione ritmica dei *battimenti*. La ragione di questo insieme deve potersi ritrovare sia nei singoli elementi che con il loro valore di scala rappresentano un *foreground*, sia nei *battimenti,* ovvero in quelle *differenze* derivanti dalle infinite combinazioni dei suoi elementi e che formano il *background*.
Ogni elemento-frequenza di scala deve contenere e tracciare questa ragione bifronte che sarà “pura” in quanto *naturale*, esattamente *proporzionale e* perfettamente *sincronica*.
La risposta a come procedere senza la costante pura 2:1 si trae dalla semplice analisi del rapporto 3:2. Questo rapporto, che nel modulo di ottava delimita un arco di 7 semitoni, è un piccolo insieme chiamato “dominante” che comprende 8 suoni e può definire tutti gli intervalli di scala: infatti contiene i rapporti 6:5, 5:4 e con 4:3 raggiunge - per convenzione - il rapporto 2:1.
In una scala di suoni il più piccolo scostamento dal rapporto 3:2, il primo rapporto da cui può estrarsi la matrice semitonale, avrà un riverbero su tutti gli altri intervalli, proprio come avviene in un sistema di leve dove la minima variazione su di una sola leva modifica l’intero sistema.
Questa evidenza ha indirizzato la ricerca verso una giusta “costante di differenza”.
La corretta sincronizzazione dei *battimenti*, ottenuta tramite sperimentazione diretta, ha portato a due nuove coordinate: le *differenze* prodotte dalle combinazioni 0-19 e 0-24, relative ai parziali armonici 3 e 4, sono ora calcolabili in proporzione 1:1.

3.1 - L’ALGORITMO CHAS

Nella scala semitonale, come 2 è il valore parziale corrispondente al semitono 12, 3 è il valore del semitono 19, 4 è il valore del semitono 24, 5 è il valore parziale del semitono 28.
Se la formula del Temperamento Equabile 2^(1/12) impiega il valore parziale 2 e il relativo valore posizionale 12, l’algoritmo chas si avvale di un’uguaglianza tra due espressioni algebriche in cui compaiono 2 diversi valori parziali, i 2 relativi valori

posizionali e 2 variabili, **Δ** e **s**. La variabile **Δ** rappresenta le *differenze* e compare in entrambe le espressioni, i valori posizionali determinano il periodo, la grandezza del modulo e dell'intervallo:

$$(3-\Delta)\text{^}(1/19)=(4+\Delta)\text{^}(1/24) \qquad (1)$$

3.2 - LA VARIABILE DELTA

Nell'algoritmo chas la variabile **Δ** proporziona le *differenze* di due intervalli, $8^{va}+5^{ta}$ (grado 12°) e $8^{va}+8^{va}$ (grado 15°), ossia le combinazioni 0-19 e 0-24; questi stessi intervalli hanno *differenze costanti* dai rispettivi valori armonici 3 e 4.

Il delta procura due *differenze*, tra loro in proporzione 1:1, di uguale valore e di segno opposto, negativo per la combinazione dei suoni 0-19 e positivo per la combinazione 0-24.

Una soluzione dell'equazione chas è:

$$\Delta=0.0021253899646... \qquad (2)$$

Sostituendo questo valore al **Δ** della (1) otteniamo il *fattore incrementale* delle frequenze di scala:

$$(3-0.0021253899646)\text{^}(1/19)=(4+0.0021253899646)\text{^}(1/24)=1.0594865443501... (3)$$

Il fattore incrementale è la ragione costante di scala, il delta è la ragione di *differenza in proporzione costante* 1:1.

Le differenze degli intervalli **0-19** e **0-24** sono costanti di grado 12° e 15°.

Il loro rapporto, in questa scala esponenziale, esprime una costante di proporzionalità lineare che ritroviamo nelle combinazioni cromatiche (1-20, 1-25) - (2-21, 2-26) - (3-22, 3-27) ecc.

Il modello chas trova quindi nella variabile delta la funzione di "estensore" dei valori naturali della serie armonica.

Il delta proporziona tutte le *differenze* relative alle frequenze parziali, così da rendere ogni suono idempotente e quindi perfettamente idoneo per ogni intervallo, pronto e giusto per qualsiasi combinazione. Ogni valore-frequenza è, nel sistema, potenziale di risonanza.

Si ottengono due classi di grandezze tra loro omogenee: quella delle *frequenze* e quella delle *differenze*. Qualsiasi combinazione di *valori-frequenza* procura *valori-differenza* aventi ora una *medesima ragione d' insieme*.

3.3 - LA VARIABILE ESSE

La progressione geometrica del Temperamento Equabile, svincolata da presupposti arbitrari, ha suggerito *infinite curve esponenziali* relative a oscillazioni dei valori parziali, determinabili con una seconda *variabile arbitraria* che esprime un potenziale "elastico" e rende possibile l'*evoluzione* del sistema.

Introduciamo nella (1) la variabile arbitraria **s** (da swing = oscillazione)**,** un valore razionale, così che la (1) diventa:

$$(3-\Delta)\text{^}(1/19)=(4+(\Delta * s))\text{^}(1/24) \qquad (4)$$

La variabile **s** può fare oscillare la scala logaritmica dalla ragione 3:2 a 5:4, <u>includendo la ragione 2:1 della scala equabile</u>. Questa variabile influisce sulle distanze e la proporzione dei valori di scala relativi ai parziali 2, 3, 4, 5 e ovviamente sulle distanze e le differenze logaritmiche di tutte le possibili combinazioni armoniche.

Se **s** è una frazione (s/s1), il denominatore moltiplica il delta dell'espressione a sinistra, così che:

$(3-\Delta)\char`^(1/19) = (4+(\Delta * s/s1))\char`^(1/24)$ (5)

equivale a:
$(3-(\Delta * s1))\char`^(1/19) = (4+(\Delta * s))\char`^(1/24)$ (6)

s < 0 il valore di scala del 12mo semitono non raggiunge il rapporto 2:1.
Fattore incrementale < 1,0594630943593…(valore Equabile) tende a (5:4)^(1/4)

s = 0 il valore di scala del 12mo semitono è in **rapporto 2:1**.
Fattore incrementale (Equabile) = 1,0594630943593…

0 > s < 1 il valore di scala del 12mo semitono è in rapporto maggiore di 2:1

s = 1 il valore di scala del 12mo semitono è in **rapporto chas** 2,00053127693…:1
Fattore incrementale (chas) = 1,0594865443501…

s > 1 il valore di scala del 12mo semitono è in rapporto maggiore di 2,00053127693…:1
Fattore incrementale > 1,0594865443501…(valore chas), tende a (3:2)^(1/7).

Le due variabili **Δ** e **s** spingono non solo la ragione parziale 2 ma anche 5:4, 4:3, 3:2, 3 e 4 numeri naturali e numeri razionali così traslati in un nuovo insieme di valori in scala.
Per s = 1 la somma dei valori di scala unitaria relativi ai parziali 3 e 4 è uguale a 7.
Le *infinite oscillazioni di scala* sono tutte interne all'attrattore chas che, in questa versione, ha periodo 19*24 = 456. In modo singolare, le cifre 4, 5 e 6 corrispondono ai valori parziali che formano la prima triade maggiore.

3.4 - INSIEME CHAS: LA SIMMETRIA DEI BATTIMENTI

Fino ad oggi l'ottava pura ha più spesso definito un modulo di 13 elementi, da 0 a 12.
Il modello chas, per un ordine semitonale, dispiega un modulo di 49 elementi-suono, da 0 a 48, la cui ragione di scala è:

$$\mathbf{(4+\Delta)^{2}}$$

Con le ragioni (3 – Δ) e (4 + Δ), le combinazioni tra gli elementi **0-19, 5-24** e **0-24** procurano *battimenti costanti e simmetrici* rispetto alle combinazioni tra gli elementi **29-48, 24-43 e 24-48.**
Questo modulo risulta così essere perfettamente equilibrato e l'elemento 24, grazie al delta, è un *centro stabile* in termini assoluti:

$$\mathbf{0} *(3-\Delta) \rightarrow \mathbf{19} \rightarrow \mathbf{24} \rightarrow \mathbf{29} *(3-\Delta) \rightarrow \mathbf{48}$$

$$0 \rightarrow \mathbf{5} \ *(3-\Delta) \rightarrow \mathbf{24} \ *(3-\Delta) \rightarrow \mathbf{43} \rightarrow 48$$

$$\mathbf{0} *(4+\Delta) \rightarrow \mathbf{24} *(4+\Delta) \rightarrow \mathbf{48}$$

$$\mathbf{5} \rightarrow 24 \rightarrow \mathbf{29}$$
I--*(4 + Δ)—I

$$\mathbf{12} \rightarrow 24 \rightarrow \mathbf{36}$$

I--*(4 + Δ)—I

19 → 24→ **43**
I--*(4 + Δ)—I

Combinazioni **0 → 5 → 12 → 19 → 24 → 29 →36 → 43 → 48**
Ragioni

0 – 5, 19-24, 24-29 e 43-48 I------I I-----IOI-----I I------I (4 + Δ)/(3 – Δ)

0 –19 e 29-48 I-------------------I O I-------------------I (3 – Δ)

5 – 24 e 24- 43 I-------------------O-------------------I (3 – Δ)

0 – 24 e 24- 48 I--------------------------O--------------------------I (4 + Δ)

5 – 29 e 19- 43 I-----------I====O====I-----------I (4 + Δ)

12 –36 I------------O-----------I (4 + Δ)

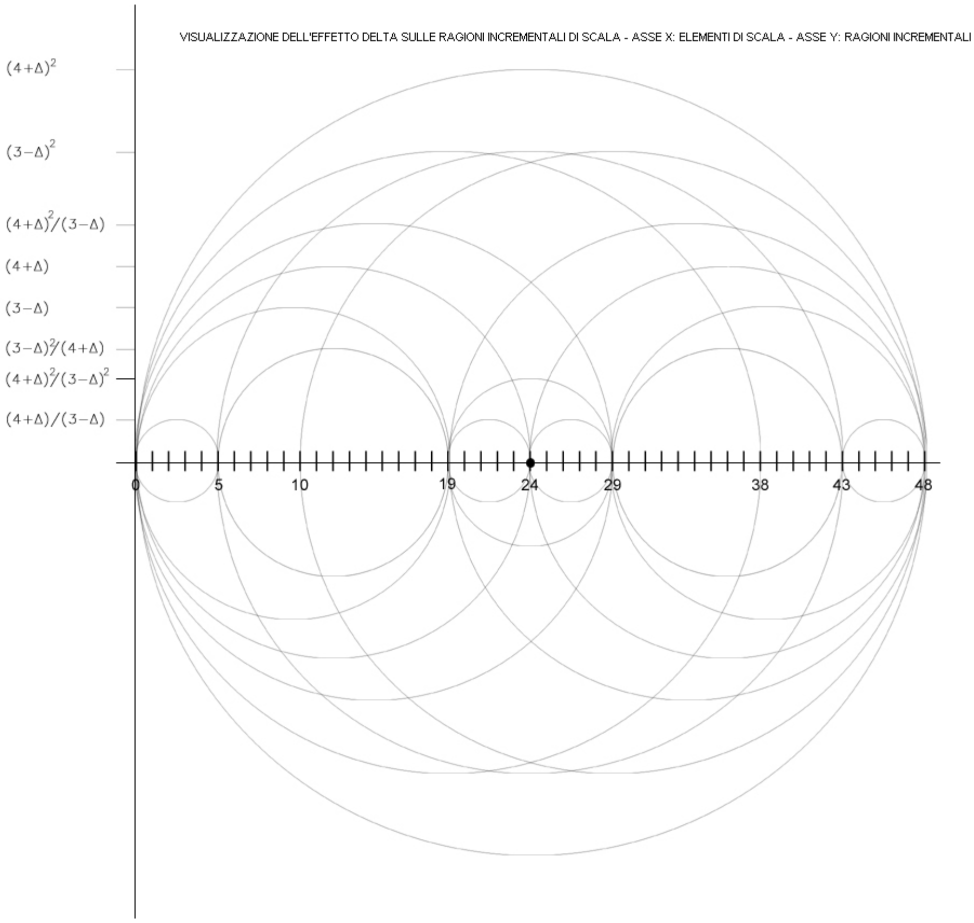
0 – 48 **O--O** **(4 + Δ)** $^{\mathbf{2}}$.

Questo schema dimostra l'equilibrio e la stabilità dell'insieme descritto dal modello chas [12].

3.5 - VISUALIZZAZIONE DELL'EFFETTO DELTA SULLE RAGIONI INCREMENTALI.

Sull'asse x sono disposti gli elementi di scala, sull'asse y le ragioni incrementali di scala per quote.
Elenco dei gradi di scala (in ordine crescente), delle ragioni e del numero di elementi relativi:

4°	= (4 + Δ) / (3 – Δ)	numero di elementi 6 - arco da 0 a 5
7°m	= (4 + Δ)^2 / (3 – Δ)^2	" " " 11 - " " 0 a 10
9°	= (3 – Δ)^2 / (4 + Δ)	numero di elementi 15 - arco da 0 a 14
12°	= (3 – Δ)	" " " 20 - " " 0 a 19
15°	= (4 + Δ)	" " " 25 - " " 0 a 24
18°	= (4 + Δ)^2 / (3 – Δ)	" " " 30 - " " 0 a 29
23°	= (3 – Δ)^2	numero di elementi 39 - arco da 0 a 38
29°	= (4 + Δ)^2	" " " 49 - " " 0 a 48

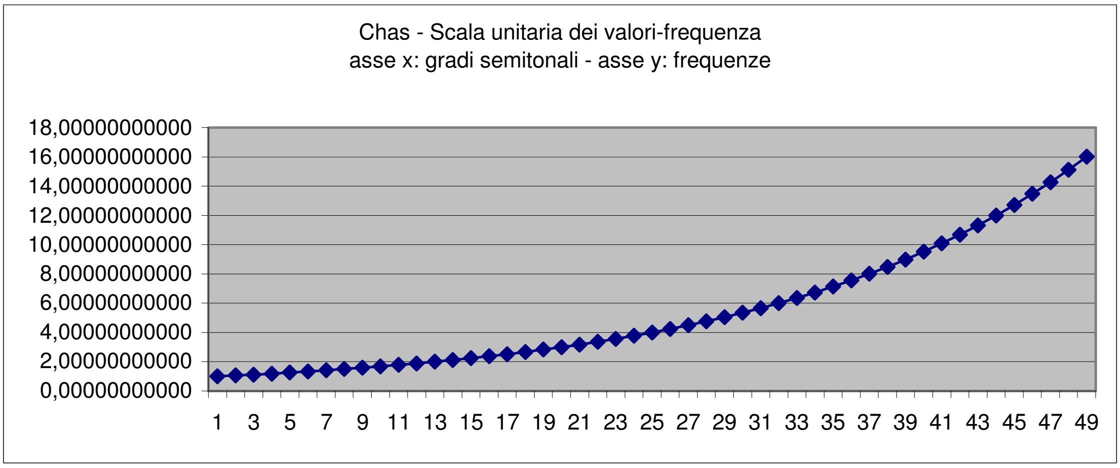


4.0 - LA SCALA SEMITONALE - Valori, Tabelle e Grafici sono elaborati con **s** = 1.
TABELLA 1.
Nel “foreground”, ossia tra i valori di scala che rappresentano le frequenze, ritroviamo la ragione incrementale logaritmica:1.0594865443501…

Scala unitaria chas		Scala delle frequenze		Cents
Gradi	Valori chas	Valori chas	Offset in Cents	Semitono in Cents
I	1,00000000000000	440,00000000000	0,00	
	1,05948654435010	466,17407951404	0,04	100,038318440222…
	1,12251173765892	493,90516456992	0,08	100,038318440222…
IIIm	1,18928608192467	523,28587604686	0,11	100,038318440222…
III	1,26003260118204	554,41434452010	0,15	100,038318440222…
IV	1,33498758639483	587,39453801372	0,19	100,038318440222…
IV+	1,41440138465974	622,33660925028	0,23	100,038318440222…
V	1,49853923535714	659,35726355714	0,27	100,038318440222…
	1,58768215604158	698,58014865830	0,31	100,038318440222…
	1,68212788103081	740,13626765356	0,34	100,038318440222…
	1,78219185582829	784,16441656445	0,38	100,038318440222…
	1,88820829070040	830,81164790818	0,42	100,038318440222…
VIII	**2,00053127692738**	880,23376184805	0,46	100,038318440222…
	2,11953596945608	932,59582656068	0,50	100,038318440222…
IX	2,24561983990476	988,07272955810	0,54	100,038318440222…

	2,37920400410472	1046,84976180608	0,57	100,038318440222…
X	2,52073462861283	1109,12323658965	0,61	100,038318440222…
	2,67068442089264	1175,10114519276	0,65	100,038318440222…
	2,82955420814119	1245,00385158213	0,69	100,038318440222…
XII **(3-Δ)**	**2,99787461003480**	**1319,06482841531**	0,73	100,038318440222…
	3,17620781098067	1397,53143683150	0,77	100,038318440222…
	3,36514943779371	1480,66575262923	0,80	100,038318440222…
	3,56533054906974	1568,74544159069	0,84	100,038318440222…
	3,77741974289974	1662,06468687589	0,88	100,038318440222…
XV **(4+Δ)**	**4,00212538996469**	**1760,93517158446**	0,92	100,038318440222…

Grafico 1 – Valori di scala unitaria chas.



4.1 - LE DIFFERENZE CHAS

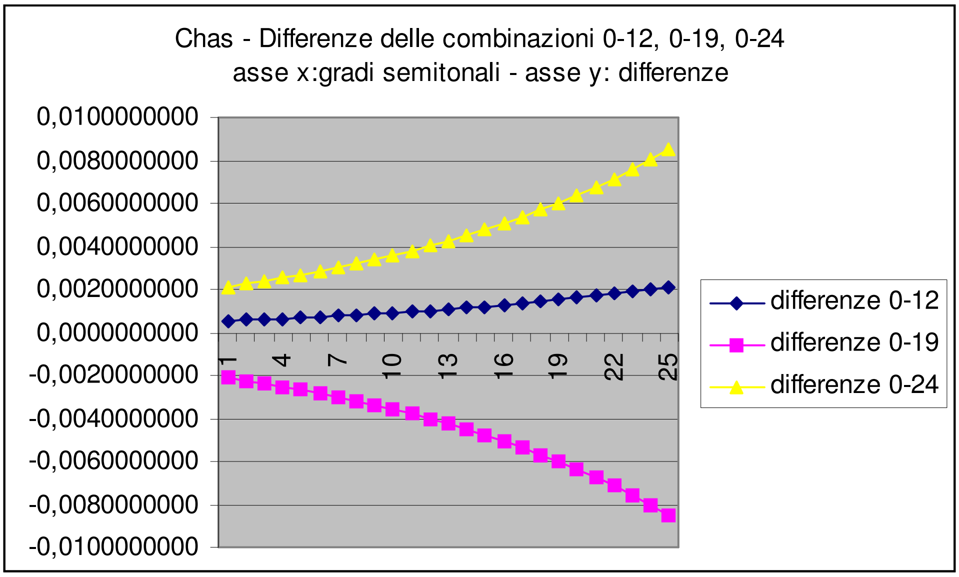
Nel "background" ritroviamo la ragione di *differenza proporzionale* ± 0,002125389965…

TABELLA 2.

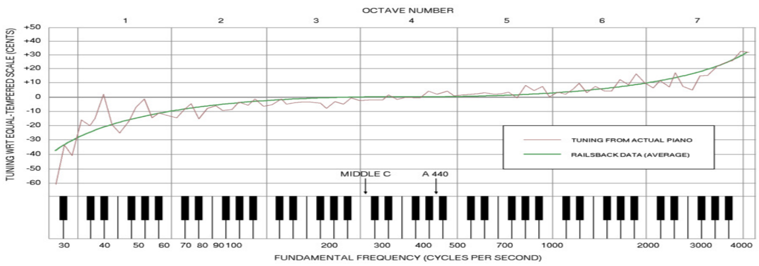
Differenze tra i valori chas (scala unitaria) e i relativi valori armonici 2, 3 e 4.

Differenze arm. 2	Differenze arm. 3	Differenze arm. 4
0,0005312769	**-0,002125389965**	**0,002125389965**
0,0005628808	-0,002251822070	0,002251822069
0,0005963646	-0,002385775183	0,002385775182
0,0006318403	-0,002527696704	0,002527696704
0,0006694262	-0,002678060646	0,002678060646
0,0007092481	-0,002837369220	0,002837369219
0,0007514388	-0,003006154510	0,003006154509
0,0007961393	-0,003184980253	0,003184980253
0,0008434989	-0,003374443722	0,003374443722
0,0008936757	-0,003575177719	0,003575177718
0,0009468374	-0,003787852686	0,003787852686
0,0010031615	-0,004013178953	0,004013178952
0,0010628361	-0,004251909101	0,004251909100
0,0011260606	-0,004504840480	0,004504840479
0,0011930460	-0,004772817873	0,004772817872
0,0012640162	-0,005056736315	0,005056736314
0,0013392081	-0,005357544085	0,005357544083
0,0014188730	-0,005676245868	0,005676245867
0,0015032769	-0,006013906120	0,006013906119
0,0015927016	-0,006371652613	0,006371652612
0,0016874459	-0,006750680209	0,006750680207
0,0017878263	-0,007152254846	0,007152254845
0,0018941779	-0,007577717772	0,007577717770
0,0020068560	-0,008028490016	0,008028490014
0,0021262369	-0,008506077143	0,008506077141

Grafico 2 – Curve di *differenza* chas relative ai valori armonici 2, 3 e 4.



4.2 – CONFRONTO TRA LA CURVA RAILSBACK E LA CURVA DI OTTAVA CHAS.



- CURVA RAILSBACK -

TABELLA 3.

VALORI EQUABILI	VALORI CHAS	SCOSTAMENTO CHAS (Hz)	SCOSTAMENTO CHAS CENTS)
55,0000000	54,956192929	-0,0438070708	-1,37
110,0000000	109,941582816	-0,0584171842	-0,91
220,0000000	219,941575058	-0,0584249421	-0,45
440,0000000	**440,000000000**	0,0000000000	0
880,0000000	880,233761848	0,2337618481	0,46
1760,0000000	1760,935171585	0,9351715846	0,92

Grafico 3 – Curva di scostamento dei valori chas dal rapporto 2:1 (Hz).

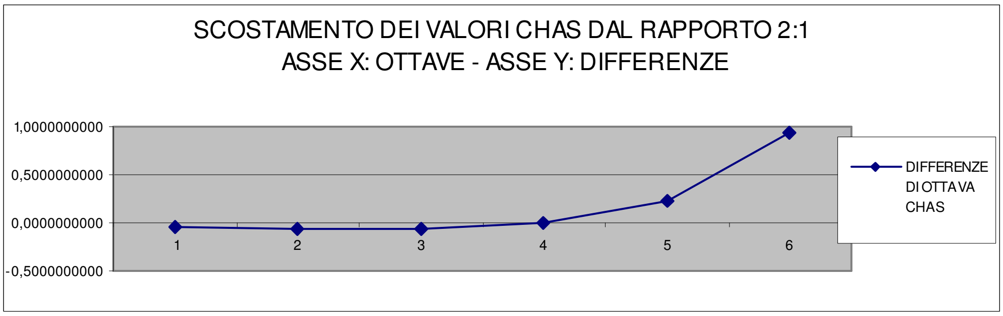
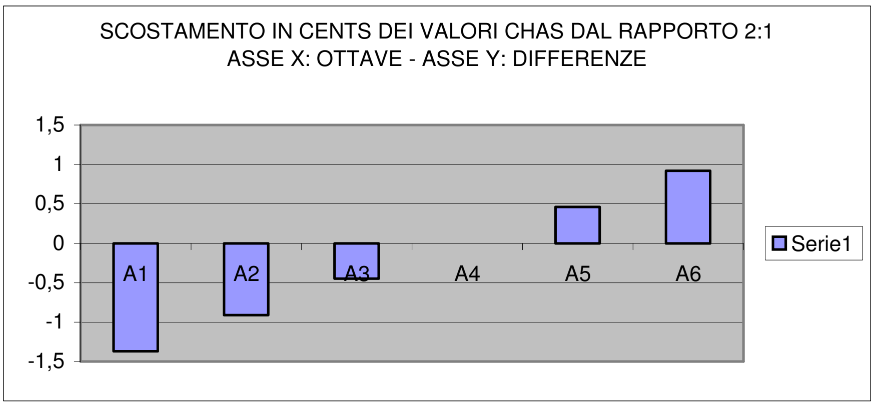
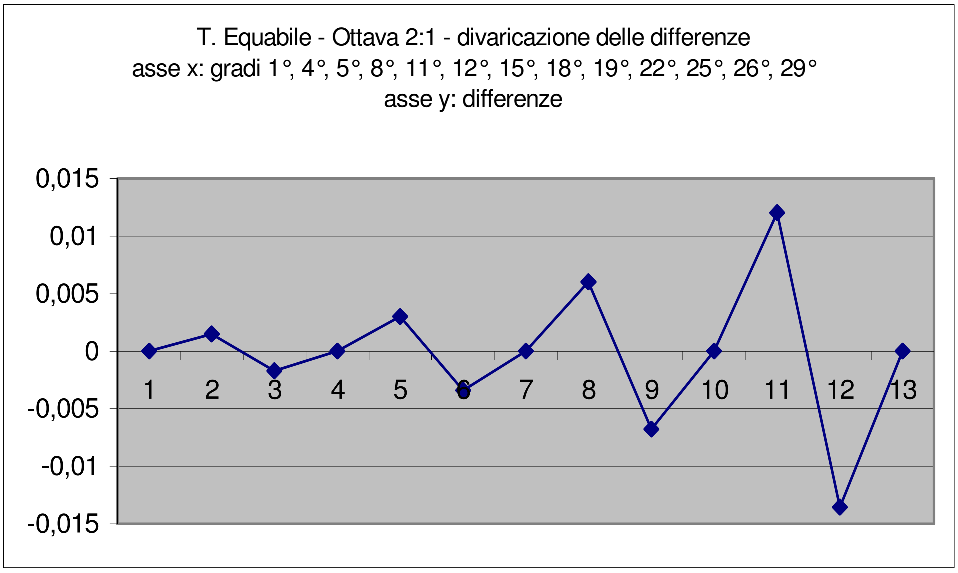


Grafico 4 – Curva di scostamento dei valori chas dal rapporto 2:1 (Cents).



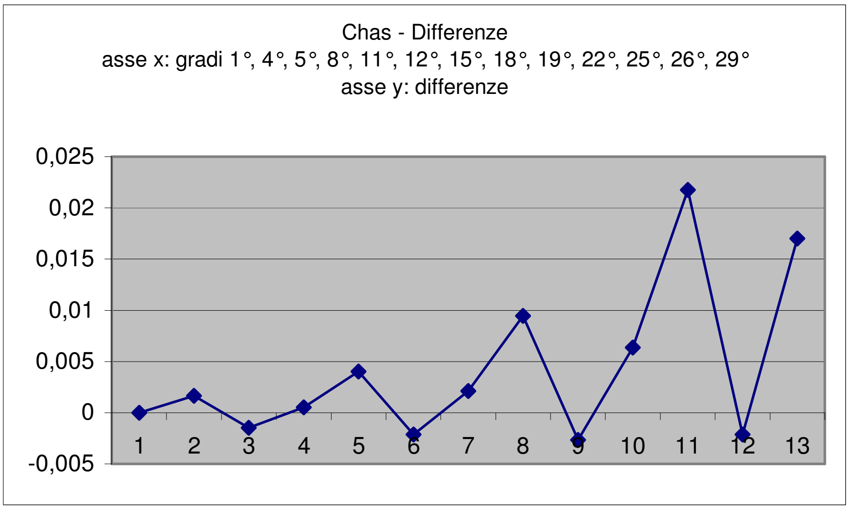
4.3 – Confronto tra le differenze equabili e chas relative ai rapporti 4:3 e 3:2.
Nella scala "equabile", definita in ragione 2, gli intervalli di ottava hanno differenza = 0.
Per questo le *differenze* relative ai valori parziali diversi da 2 si riportano alle ragioni multiple di 2.
Le differenze, divise tra loro, hanno quoziente 2 per combinazioni 0-12, 4 per le combinazioni 0-24 ecc..Ad esclusione del parziale 2 e dei suoi multipli, le curve di differenza relative a tutti gli altri parziali si divaricano esponenzialmente con andamento monotono.

Grafico 5 – Divaricazione esponenziale delle *differenze* prodotte dalla scala equabile.



Nella scala di frequenze chas le curve dei valori di *differenza* disegnano la *precisa forma* ordinata dalla *ragione incrementale* e dalla *ragione di differenza*.
Questo andamento comprova l'ottimizzazione dei battimenti e il massimo grado di coerenza del modello chas.

Grafico 6 – Compasso esponenziale delle differenze chas.



4.4 – Differenze tra i valori di scala in rapporto 1:2, 1:4, 1:8 ecc. e i relativi valori chas.

TABELLA 4.

Ottave naturali 2:1	Ottave chas	Differenze	
1	1	0	DIFF: 00
2	2,000531277	**0,000531277**	DIFF: 01
4	4,002125390	**0,002125390**	DIFF: 02
8	8,006377018	**0,006377018**	DIFF: 03
16	16,017007639	**0,017007639**	DIFF: 04
32	32,042524746	**0,042524746**	DIFF: 05
64	64,102072949	**0,102072949**	DIFF: 06
128	128,238201856	**0,238201856**	DIFF: 07
256	256,544533718	**0,544533718**	DIFF: 08
512	513,225363647	**1,225363647**	DIFF: 09

Grafico 7 – *Differenze* (sopra in grassetto) dei valori chas, relativi all'armonico **2:1, 4:1, 8:1 ecc.**.

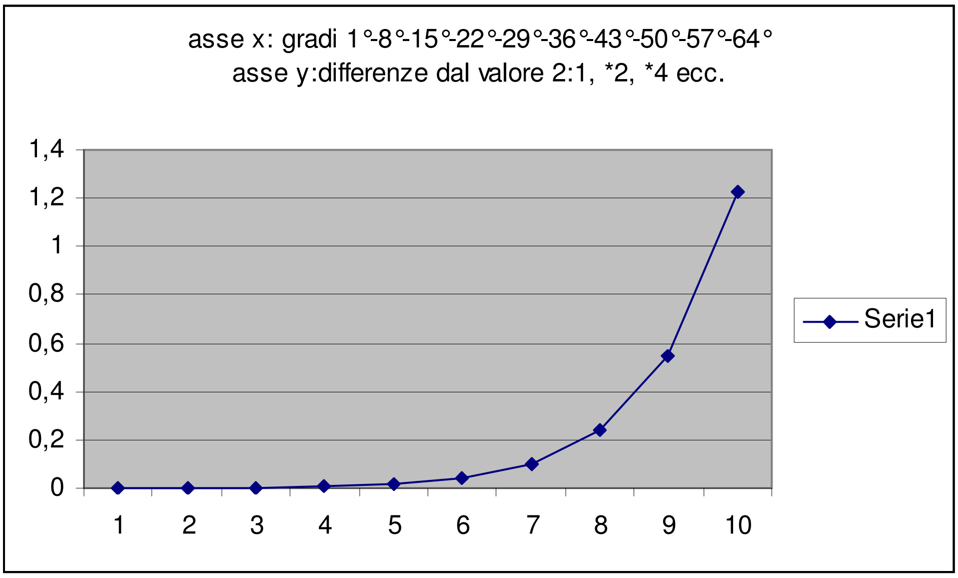


TABELLA 5.

Scostamento dei valori di ottava chas in scala. LA4 = 440.0 Hz.

Ottave in Ragione **2**	Ottave in Ragione CHAS	Valori di scostamento
27,5	27,4707991637	-0,02920083627
55,0	54,9561929292	-0,04380707077
110,0	109,9415828157	-0,05841718430
220,0	219,9415750579	-0,05842494211
440,0	440,0000000000	0,00000000000
880,0	880,2337618481	0,23376184808
1760,0	1760,9351715846	0,93517158460
3520,0	3522,8058873966	2,80588739660

4.5 - Catena di quozienti derivanti dalle differenze tra la progressione in ragione 2 e quella in ragione chas 2,0005312…

In generale, se in una scala logaritmica ci scostiamo dalla ragione 2^(1/12), le combinazioni 0-12, 0-24, 0-36 ecc, procureranno delle *differenze* relative ai rapporti 1:2, 1:4, 1:8 ecc.

Dividendo queste differenze tra loro, noteremo che i quozienti tendono alla *catena di rapporti n/n+1*, tipici della corda vibrante.

Nel modello chas i quozienti delle differenze relative al rapporto 1:2, 1:4, 1:8 ecc. restituiscono valori molto prossimi (settimo decimale) ai rapporti n/n+1. *Ogni valore-frequenza di scala, nelle infinite combinazioni, porta per sé e per l'insieme questi quozienti armonici.*

Avvalendoci della TABELLA 4 (paragrafo 4.4), dividiamo la differenza 01 con la 02, la 02 con la 03 e così di seguito per ottenere i quozienti:

DIFF. 01/ DIFF. 02 =	0,000531277 :	0,002125390 =	q_{00}	0,249973857
DIFF. 02/ DIFF. 03 =	0,002125390 :	0,006377018 =	q_{01}	0,333289064
DIFF. 03/ DIFF. 04 =	0,006377018 :	0,017007639 =	q_{02}	0,374950195
DIFF. 04/ DIFF. 05 =	0,017007639 :	0,042524746 =	q_{03}	0,399946872
DIFF. 05/ DIFF. 06 =	0,042524746 :	0,102072949 =	q_{04}	0,416611323
DIFF. 06/ DIFF. 07 =	0,102072949 :	0,238201856 =	q_{05}	0,428514501
DIFF. 07/ DIFF. 08 =	0,238201856 :	0,544533718 =	q_{06}	0,437441884
DIFF. 08/ DIFF. 09 =	0,544533718 :	1,225363647 =	q_{07}	0,444385403
DIFF. 09/ DIFF. 10 =	1,225363647 :	2,723392125 =	q_{08}	0,449940218

Dividiamo ancora questi quozienti e confrontiamo i risultati con i valori n/n+1in tabella 6:

$q_{00} : q_{01}$	=	0,249973857 : 0,333289064
$q_{01} : q_{02}$	=	0,333289064 : 0,374950195
$q_{02} : q_{03}$	=	0,374950195 : 0,399946872
$q_{03} : q_{04}$	=	0,399946872 : 0,416611323
$q_{04} : q_{05}$	=	0,416611323 : 0,428514501
$q_{05} : q_{06}$	=	0,428514501 : 0,437441884
$q_{06} : q_{07}$	=	0,437441884 : 0,444385403
$q_{07} : q_{08}$	=	0,444385403 : 0,449940218

TABELLA 6.

$q_n : q_{n1}$ **Chas**	**n/n+1 – frazione**	**n/n+1 – valore decimale**
0,750000004408948	**3/4**	0,750000000000
0,888888894114416	**8/9**	0,888888888889
0,937500005511253	**15/16**	0,937500000000
0,960000005643583	**24/25**	0,960000000000
0,972222227937747	**35/36**	0,972222222222
0,979591842493441	**48/49**	0,979591836735
0,984375005786949	**63/64**	0,984375000000
0,987654326793812	**80/81**	0,987654320988

Vediamo ora che anche le scale logaritmiche costruite sui rapporti 3:2, 5:4, 3:1 e 5:1 determinano differenze dai rapporti 2:1, 4:1, 8:1 ecc. che tendono alla stessa catena di quozienti.

((3/2)^(1/7)) = 1.0596340226671… ((5/4)^(1/4)) = 1.0573712634406…

Differenze dai rapporti 2:1, 4:1 ecc. -		**Quozienti**	Differenze dai rapporti 2:1, 4:1 ecc. –		**Quozienti**
0,0038754738	0,249758017	0,750000234	-0,0468750000	0,252964427	0,750035151
0,0155169145	0,333010586	0,888889166	-0,1853027344	0,337270095	0,888930544
0,0465958596	0,374636792	0,937500293	-0,5494194031	0,379411077	0,937543924
0,1243760907	0,399612453		-1,4480847716	0,404686188	
0,3112417786			-3,5782905696		

3^(1/19) = 1.05952606473828… 5^(1/28) = 1.0591640081942…

Differenze dai rapporti 2:1, 4:1 ecc. -		**Quozienti**	Differenze dai rapporti 2:1, 4:1 ecc. –		**Quozienti**
0,00142693	0,24991085	0,75000003	-0,00676468	0,25042351	0,75000072
0,00570977	0,33321445	0,88888893	-0,02701298	0,33389769	0,88888974
0,01713542	0,37486624	0,93750004	-0,08090196	0,37563454	0,93750090
0,04571076	0,39985731		-0,21537411	0,40067646	
0,11431768			-0,53752623		

Se in una scala logaritmica semitonale volessimo privilegiare il valore parziale 5 dovremmo adottare la ragione 5 e la posizione 12+12+4 = ordinale 28, quindi **5^(1/28) = 1.059164008**…
In questa scala, come ragione incrementale del 9° grado di scala unitaria (elemento 14), ritroviamo il componente 5^(1/2) della "sezione aurea".
A distanza di ottave, (5*2)^(1/40), (10*2)^(1/52) ecc, questa ragione semitonale tende a 2^(1/12).
Se in una diversa scala logaritmica volessimo privilegiare il valore parziale 3 dovremmo adottare la ragione 3 e la posizione 12+7 = ordinale 19, quindi **3^(1/19) = 1.059526065**…
Anche questa ragione, a distanza di ottave, (3*2)^(1/31), (6*2)^(1/43) ecc,. tende a 2^(1/12).
La ragione 2^(1/12), a distanza di ottave (+12 al valore posizionale) non si modifica:
4^(1/24) = 8^(1/36) = 16^(1/48) = **1.059463094…**
Il valore 2 e l'incremento posizionale +12, all'infinito, fanno convergere le ragioni 5 e 3 sulla ragione 2. Le serie derivanti dai valori 3 e 5, tra loro divergenti, trovano nel valore 2 un fattore di convergenza che nel modello chas si traduce nel compasso delle curve relative ai valori di differenza (vedi paragrafo 4.3 - grafico 6).
La catena di quozienti-differenza non può ritrovarsi nella suddivisione equabile calcolata in ragione 2:1 perché le ottave "pure" non procurano alcun valore di differenza.

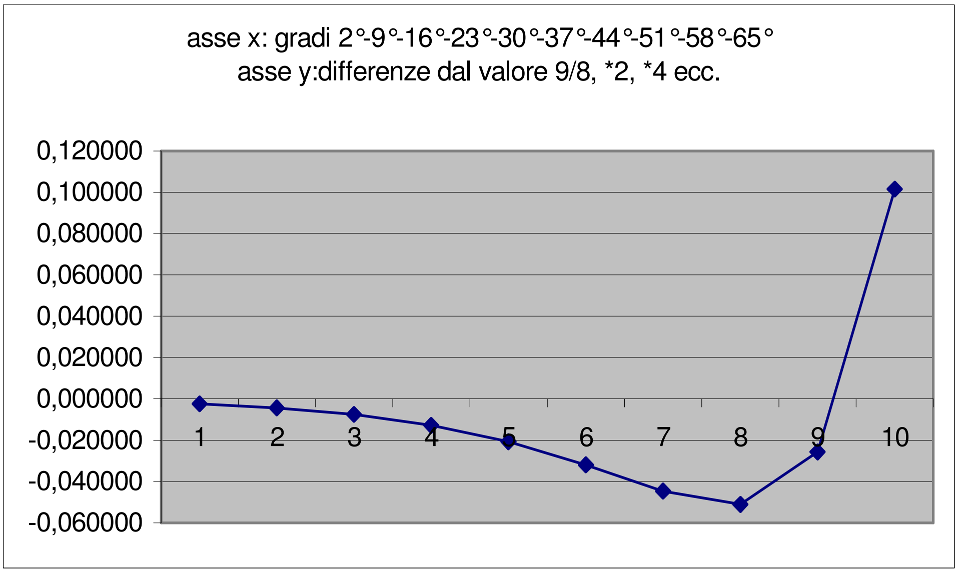
4.6 - Confronto tra i valori di scala in rapporto 9:8 e i relativi valori chas. Valori di differenza

TABELLA 7.

Seconde naturali 9:8	**Seconde chas**	**Differenze**
1,125	1,122511738	**-0,002488262**
2,250	2,245619840	**-0,004380160**
4,500	4,492432726	**-0,007567274**
9,000	8,987252178	**-0,012747822**
18,000	17,979279077	**-0,020720923**
36,000	35,968110132	**-0,031889868**
72,000	71,955329294	**-0,044670706**
144,000	143,948886799	**-0,051113201**
288,000	287,974250331	**-0,025749669**

576,000	576,101494758	**0,101494758**
1152,000	1152,509058989	0,509058989
2304,000	2305,630419534	1,630419534
4608,000	4612,485767480	4,485767480
9216,000	9227,422042560	11,422042560
18432,000	18459,746402221	27,746402221

Grafico 8 – Valori di differenza (sopra in grassetto) chas relativi al rapporto **9:8.**



La curva di differenza di questi intervalli, al 51° grado inverte il suo andamento.
Questa inversione è condizionata dalla variabile **s**. Lo stesso effetto, vedremo avanti, si ritrova nei gradi relativi ai rapporti 3:2, 3:1, ecc..
Così il modello chas ovvia alla divaricazione esponenziale delle differenze equabili (vedi paragrafo 4.3 – grafico 5).

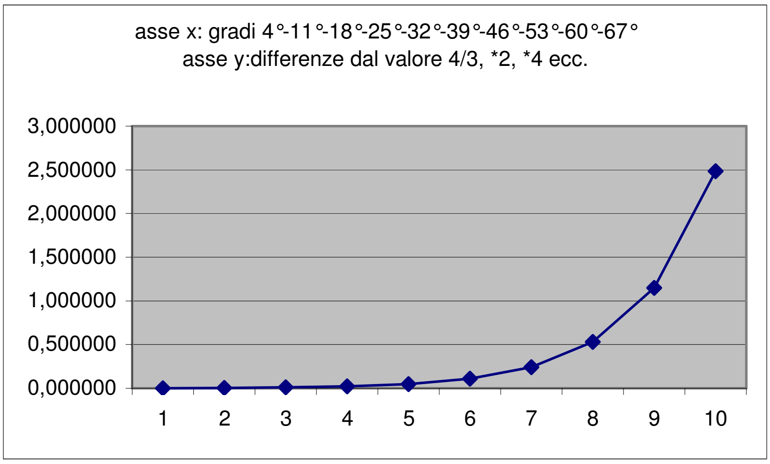
4.7 - Confronto tra i valori di scala in rapporto 4:3 e i relativi valori chas. Valori di differenza

TABELLA 8.

Quarte naturali 4:3	Quarte chas	Differenze
1,333333333	1,334987586	**0,00165425306**
2,666666667	2,670684421	**0,00401775432**
5,333333333	5,342787715	**0,00945438185**
10,666666667	10,688413931	**0,02174726393**
21,333333333	21,382506370	**0,04917303636**
42,666666667	42,776372773	**0,10970610655**
85,333333333	85,575471649	**0,24213831610**
170,666666667	171,196407579	**0,52974091205**
341,333333333	342,483767871	**1,15043453794**
682,666666667	685,149489491	**2,48282282462**
1365,333333333	1370,662983148	5,32964981457
2730,666666667	2742,054168014	11,38750134683
5461,333333333	5485,565126339	24,23179300589
10922,666666667	10974,044607262	51,37794059540

21845,333333333	21953,919472021	108,58613868762

Grafico 9 – Valori di differenza (sopra in grassetto) chas relativi al rapporto **4/3**.

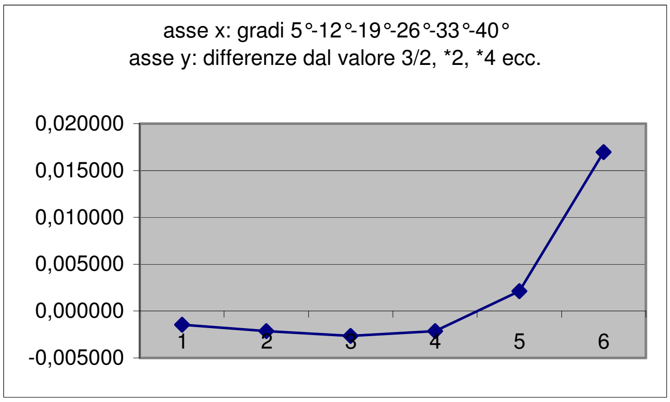


4.8 - Confronto tra i valori di scala in rapporto 3:2 e i relativi valori chas. Valori di differenza.

TABELLA 9.

Quinte naturali 3:2	Quinte chas	Differenze
1,50	1,4985392354	**-0,0014607646**
3,00	2,9978746101	**-0,0021253899**
6,00	5,9973419221	**-0,0026580779**
12,00	11,9978700941	**-0,0021299059**
24,00	24,0021143805	**0,0021143805**
48,00	48,0169805324	**0,0169805324**
96,00	96,0594713822	0,0594713822
192,00	192,1699769522	0,1699769522
384,00	384,4420493932	0,4420493932
768,00	769,0883440050	1,0883440050
1536,00	1538,5852869581	2,5852869581
3072,00	3077,9879888917	5,9879888917
6144,00	6157,6112420082	13,6112420082
12288,00	12318,4938812442	30,4938812442
24576,00	24643,5322949622	67,5322949622

Grafico 10 – Valori di differenza (sopra in grassetto) chas relative al rapporto **3/2**.



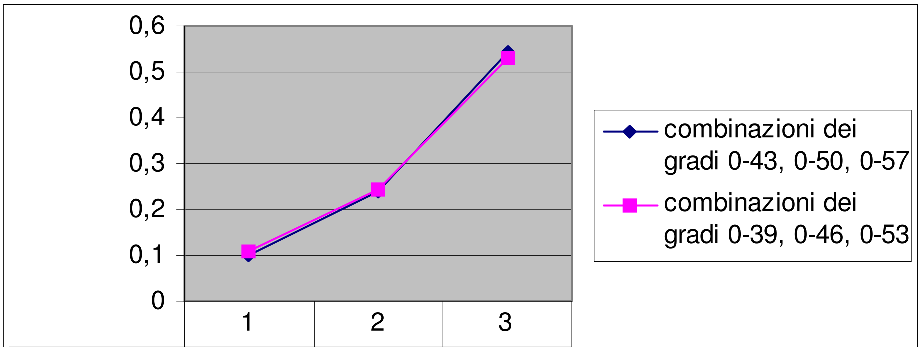
La curva di differenza relativa al rapporto 3/2, al 19° grado inverte il suo andamento.

4.9 - Differenze relative ai valori armonici naturali – La torsione della forma chas.

TABELLA 10.

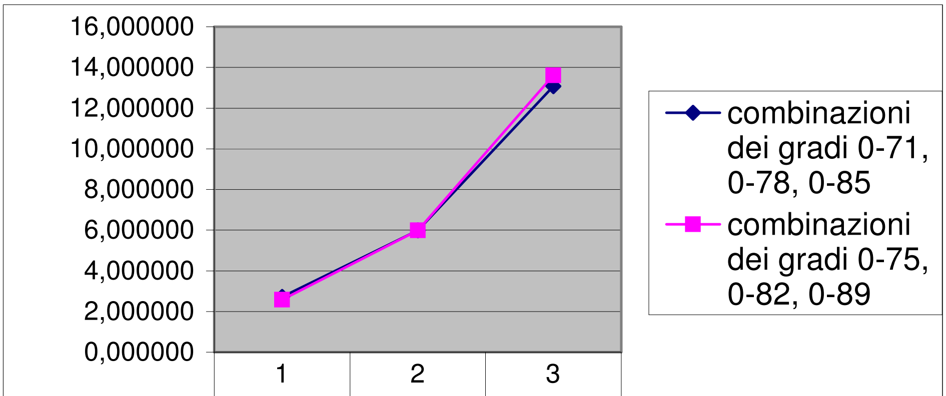
2:1	**9:8**	**5:4**	**4:3**	**3:2**	**5:3**	**15:8**
0	-0,002488	0,010033	0,001654	-0,001461	0,015461	0,013208
0,000531	-0,004380	0,020735	0,004018	-0,002125	0,031816	0,027420
0,002125	-0,007567	0,042808	0,009454	-0,002658	0,065420	0,056846
0,006377	-0,012748	0,088296	0,021747	-0,002130	0,134417	0,117707
0,017008	-0,020721	0,181952	0,049173	0,002114	0,275988	0,243447
0,042525	-0,031890	0,374626	0,109706	0,016981	0,566291	0,502961
0,102073	-0,044671	0,770702	0,242138	0,059471	1,161217	1,038066
0,238202	-0,051113	1,584315	0,529741	0,169977	2,379721	2,140436
0,544534	-0,025750	3,254476	1,150435	0,442049	4,874046	4,409516
1,225364	0,101495	6,680690	2,482823	1,088344	9,977360	9,076387
2,723392	0,509059	13,704946	5,329650	2,585287	20,413377	18,667621
5,992259	1,630420	28,097209	11,387501	5,987989	41,744313	38,365212
13,075756	4,485767	57,569414	24,231793	13,611242	85,324228	78,790910
28,334570	11,422043	117,889551	51,377941	30,493881	174,320639	161,703888
61,036415	27,746402	241,282011	108,586139	67,532295	355,987592	331,654100

Grafico 11 – Il valore della differenza di ottava, 2:1, al 57° supera quello della quarta, 4:3, al 53° grado (evidenziati in verde).



	1	2	3
combinazioni dei gradi 0-43, 0-50, 0-57	0,1020729	0,2382019	0,5445337
combinazioni dei gradi 0-39, 0-46, 0-53	0,109706	0,242138	0,529741

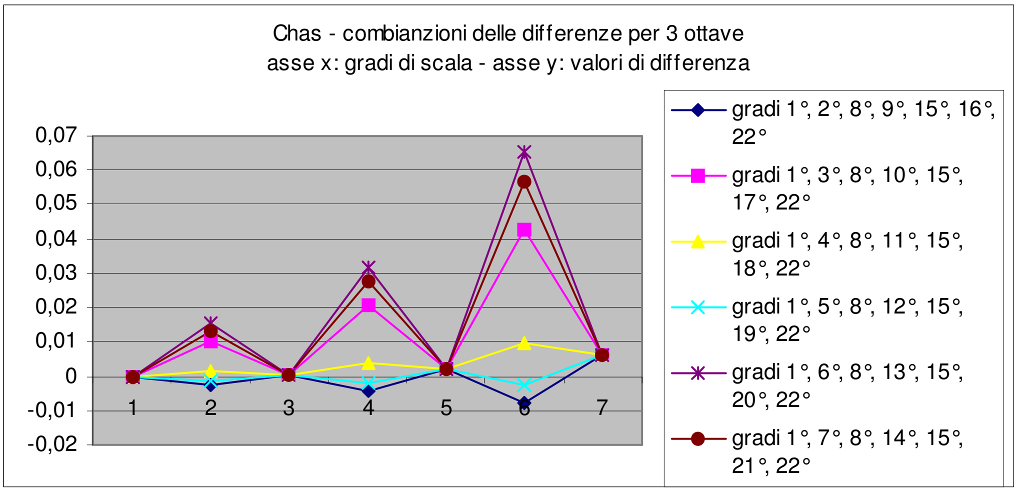
Grafico 12 – Il valore della differenza di quinta, 3:2, al 89° grado supera quello di ottava, 2:1, al 85° grado (evidenziati in giallo).



	1	2	3
combinazioni dei gradi 0-71, 0-78, 0-85	2,723392	5,992259	13,075756
combinazioni dei gradi 0-75, 0-82, 0-89	2,585287	5,987989	13,611242

Possiamo immaginare le *differenze* prodotte dalla combinazione di due suoni, quindi anche un *flusso di differenze*, ovvero *onde di battimenti sincronici*, derivanti da infinite combinazioni di suoni.
I suoni fondamentali, con le differenze relative ai parziali 3 e 4, determinano su un terzo piano *eliche di differenze* che caratterizzano la *torsione* di un simile insieme-forma.
La ragione equabile 2:1, determinando curve di differenza monotòne, impedisce questo fenomeno.

Grafico 13 – Le *combinazioni dei valori di differenza* relativi ai gradi della scala mostrano la *torsione dell' insieme-forma* descritto dal modello chas.



CONCLUSIONI

Il modello chas evidenzia la relazione fondamentale tra frequenze e differenze armoniche.
Nella scala di frequenze chas, lo *scostamento dei valori di ottava* dal parziale 2 (vedi paragrafo 4.2) disegna una curva analoga alla *curva media di inarmonicità* rilevata su strumenti a intonazione fissa.
Ciò fa credere che, per l'intervallo di ottava e più in generale per il parziale 2, sia finalmente possibile adottare una naturale *curva standard* di riferimento.
Questo sistema mette in luce una *catena armonica,* la serie di valori n/n+1 (vedi paragrafo 4.5) a cui pure tendono le ragioni parziali 3 e 5 nelle rispettive scale logaritmiche.
La catena di valori n/n+1, come una dorsale, sostiene un reticolo o meglio un flusso di *differenze*.
Queste differenze definiscono una precisa *forma* che, a buon titolo, potremmo denominare **"**chorale" in quanto riferibile all'effetto d'insieme dei suoni parziali.
Un "chorale" può descrivere *onde di battimenti*, effetto delle infinite combinazioni tra frequenze fondamentali e parziali di corde vibranti; *fondamentali e parziali che si manifestano in natura con precisi rapporti proporzionali e sempre nello stesso ordine*.
Ciò fa credere che questo modello possa aprire verso nuove indagini sia nelle relazioni tra energia, suono e materia, sia in quegli ambiti in cui la risonanza, il battimento e altri fenomeni relativi alle onde sono oggetto di studio.
Qui ritroviamo il *motivo elica*, ovvero un piano di *torsione della forma* (vedi paragrafo 4.9) prodotta dal naturale intreccio delle differenze relative ai suoni parziali 2, 3 e 5.
Gli stessi parziali, in questa scala semitonale (per **s** = 1), concorrono a determinare:
la differenza sul parziale 2:

$$0.0005312769273\ldots$$

la differenza **Δ** sui parziali 3 e 4:

$$0.0021253899646\ldots$$

e la ragione incrementale di scala chas:

$$1.0594865443501\ldots$$

In questa trentennale ricerca i numeri rappresentano un mero conforto. Si scrive ancora che dispiegare in scala i rapporti armonici con una ragione unica sia impossibile, come schiacciare una semisfera su un piano.
Invece troviamo che i valori superparticulares n/n+1, apprezzabili nel piano, concorrono alla definizione di una forma dinamica coerente, equilibrata e perfettamente sincrona.
Il numero PHI descrive una proporzione sul piano; il Frattale, muovendo da valori arbitrari, descrive l'auto-somiglianza.
Il *chorale* del modello chas esprime una forma evolvibile, proporzionata e auto-somigliante, forte di suoni fondamentali e differenze parziali interagenti nella dimensione Tempo.

NOTE E LINCOGRAFIA:
[1] - I links selezionati sono afferenti ad Atenei Italiani o a Istituzioni internazionali qualificate.
[2] - Joseph Sauveur - Principes d'acoustique et de musique - Paris, 1701.
[3] - Link: Università di Modena e Reggio Emilia - Dipartimento di Fisica - Battimenti
http://fisicaondemusica.unimore.it/Battimenti.html
[4] - Link: Articolo di Gianni Zanarini - Docente di Fisica e Acustica Musicale Unibo
Il divenire dei suoni: http://www.memex.it/SONUS/art8.htm
[5] - Link: Università di Modena e Reggio Emilia - Dipartimento di Fisica – Scala naturale
http://fisicaondemusica.unimore.it/Scala_naturale.html
[6] - Gioseffo Zarlino (1517-1590) – Istitutioni Harmoniche – Venezia, 1588.
[7] - Link: Carmine Emanuele Cella – Ricercatore IRCAM - Sulla struttura logica della musica
http://www.cryptosound.org/writings/music/files/StrutturaLogica.pdf
[8] - Link: David J. Benson – Music: A Mathematical Offering - University of Aberdeen – 2006
http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/music.pdf
[9] - Jakob Bernoulli (1654–1705) – Specimen alterum Calculi differentialis… - 1691
[10] **-** O.L. Railsback (1938) : Scale Temperament as Applied to Piano Tuning **–** Link: The Journal of the Acoustical Society of America:
http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=JASMAN000009000003000274000005&idtype=cvips&gifs=yes –
Link: Robert W. Young (1952): Inharmonicity of Plain Wire Piano Strings - The Journal of the Acoustical Society of America: http://www.afn.org/~afn49304/youngnew.htm#ftnote8
[11] – Riferito alla scala tradizionale.
[12] - Nel caso dell'*orbita calcolata sul piano*, il rapporto tra le *distanze dal sole di due pianeti con periodo orbitale uno doppio dell'altro*, è 1.5874…, un valore che insieme a 2^(1/2) e la Costante Deliana 2^(1/3) ritroviamo nella scala unitaria logaritmica in ragione 2:1. Nella scala chas questo valore di scala è ottenuto grazie all'effetto-delta sui parziali 3 e 4, risulta da
$((4 + \Delta)^{(1/2)} \cdot (4 + \Delta)^3)/(3 - \Delta)^4 = 1.5876\ldots$ e comporta la differenza 0.0002.

Altri spunti di approfondimento:
- ALESSANDRO BERTIROTTI - Dispense del seminario tenuto all'interno del Corso di Etnologia
a.a. 2001-2002
http://eprints.unifi.it/archive/00000168/00/Bertirotti-Etnomusicologia_e_antropologia_della_musica.pdf
- FABIO BELLISSIMA - UNISI - SIMMETRIA DI SCALA
http://digilander.libero.it/initlabor/musica-simmetria/scala-pitagorica.htm
– CARLO SERRA – UNIMI - COMPONENTI PSICOLOGICHE– SAGGIO SU JACQUES CHAILLEY – PAR.1
http://users.unimi.it/~gpiana/dm10/serra/chailley.pdf
- GIANNI ZANARINI – CONSAPEVOLEZZE SCIENTIFICHE E PRATICHE COMPOSITIVE
http://www.ulisse.sissa.it/biblioteca/saggio/2004/Ubib041001s002/at_download/file/Ubib041001s002.pdf
- ALVISE VIDOLIN – CONSERVATORIO DI VENEZIA – MUSICA INFORMATICA E TEORIA MUSICALE – NUOVI SCENARI
http://www.dei.unipd.it/~musica/Dispense/cap1.pdf

BIBLIOGRAFIA:

Aristosseno - Aristoxeni Elementa Harmonica – Istituto Poligrafico dello Stato – Roma, 1955.
Vincenzo Galilei: Dialogo della musica antica et moderna – Giorgio Marescotti – Firenze, 1581.
Rene' Descartes: Compendium Musicae – Stilo Editrice – Bari, 2008.
Arnold Schönberg: Manuale di Armonia - Il Saggiatore – Milano, 1963.
Georges Ifrah: Enciclopedia universale dei numeri - Mondadori, 2008.
David J. Benson: Music: A Mathematical Offering – University of Aberdeen, 2006.
Andrea Frova: Fisica nella Musica – Zanichelli - Bologna, 1999.
Stuart Isacoff: Temperamento – Storia di un enigma musicale – EDT – Torino, 2005.
Mario Livio: La sezione aurea – Rizzoli – Milano, 2003.
Florindo Gazzola: L'accordatura degli antichi strumenti da tasto – Armelin Musica - Padova, 2003.
Pietro Righini: Accordature e accordatori – Berben - Ancona, 1978.