"Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n°20 suppl 1, 2010
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)
A.S.I. 5 Proceedings 5-7- November 2010

Ostension et rapport des professeurs de l'enseignement secondaire vis-à-vis de la notion de limite de fonctions

Eduardo Lacasta*, Miguel R. Wilhelmi*, Mariana Montiel**
*Universidad Pública de Navarra (España), ** Georgia State University (USA)

E-mail: elacasta@unavarra.es miguelr.wilhelmi@unavarra.es matmxm@langate.gsu.edu

Résumé. Des professeurs de mathématiques du secondaire —51 Espagnols, 33 Français et 20 Américains des Etats-Unis— classent de quatre façons différentes la présentation de la limite d'une fonction en un point, selon leur intérêt didactique. L'application d'un test d'hypothèse non paramétrique permet d'affirmer que, à quelques exceptions près, il existe un ordre prédominant significatif, selon lequel les professeurs préfèrent en premier rang une présentation qui n'inclut pas la définition de limite, suivie par des présentations de la définition qui utilisent le recours au graphique, selon un ordre d'intensité décroissante. À partir des rangs donnés par les professeurs, 11 variables sont définies. De leur analyse par l'approche A.S.I., il découle que le critère qui regroupe les rangements de la plupart des professeurs est le caractère ostensif des présentations.

Mots clés : didactique des mathématiques, enseignement secondaire, ostension, limite de fonctions, analyse implicative.

Resumen. Profesores de matemáticas de secundaria —51 españoles, 33 franceses y 20 estadounidenses— ordenan cuatro maneras de exponer el límite de una función en un punto, según su interés didáctico. Una prueba de hipótesis no paramétrica permite afirmar que, salvo excepciones, existe un orden predominante significativo, según el cual los profesores prefieren en primer lugar una presentación que no define la noción de límite, seguida de presentaciones que, definiéndola, utilizan en orden decreciente recursos gráficos. A partir de los rangos se definen 11 variables, de cuyo análisis implicativo se desprende que el criterio que agrupa a la mayor parte de los profesores es el carácter ostensivo.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas, enseñanza secundaria, ostensión, limite de funciones, análisis implicativo.

Abstract. High School Math teachers —51 from Spain, 33 from France and 20 from the United States— ranked four different ways of presenting the notion of the limit of a function at a point, according to their didactic interest. A non-parametric hypothesis test shows that, with exceptions, there exists a significative agreement on preferences in the ranking. The teachers prefer, in first place, a presentation that does not actually define the limit notion, followed by presentations that, while defining it, use graphical resources. Eleven variables are defined from the rankings, and the implicative analysis shows that the criterion favored by most of the teachers has an ostensive character.

Keywords: mathematics education, High School, ostensive character, limit of functions, implicative analysis.

1 Antécédents

Des professeurs de l’éducation secondaire, en formation et en activité, déclarent leurs préférences sur la manière de présenter en classe la notion de limite de fonction. L’étudiant est absent de l’expérimentation réalisée et il ne s’agit pas d’envisager un problème d’ingénierie didactique ni le processus de l’étude, ni comment construire le savoir à travers de situations adidactiques. Autrement dit, l’exposé est purement didactique. Ce qui est en jeu est l’épistémologie spontanée du professeur et son rapport au savoir mathématique, par l’intermédiaire de ses déclarations.

Dans les curriculums du secondaire, on demande aux élèves de pouvoir comprendre, appliquer et interpréter des fonctions d’une seule variable sous des formes et dans des matières diverses, et pour cela on recourt à des graphiques. Il semble qu’à ces niveaux le graphe et le graphique cartésien apparaissent comme un élément d’identification de la fonction et de ses propriétés plus approprié même qu’une formule.

Les élèves du secondaire pourraient croire que si on leur donnait d’emblée le graphique, ils n’auraient plus besoin de faire l’étude des propriétés des fonctions qu’ils étudient. Qu’en est-il pour le professeur ?

Il existe des indices qui nous permettent d’affirmer que de nombreux professeurs utilisent des graphiques comme moyen d’explication « per se », comme s’ils ignoraient qu’une partie considérable des élèves ne sont pas capables d’en extraire des conclusions qu’eux-mêmes trouvent évidentes.

Plusieurs recherches ont traité le problème du passage d’une représentation d’une notion mathématique à une autre. En ce qui concerne les fonctions, Claude Janvier à la fin des années 70, tout en signalant des « difficultés de transfert sémantique », proposa l’analyse des « traductions » ou passages possibles entre la description verbale (ou le texte explicatif), le tableau, le graphique et la formule de la fonction. Janvier critique la perspective ensembliste de l’enseignement des fonctions, basée sur la notion générale d’application. La critique à la perspective ensembliste est donc accompagnée chez Janvier et chez d'autres chercheurs d'une certaine confiance en la pertinence de l'utilisation des « traductions ».

Il y a lieu, croyons-nous, de mieux questionner la tradition, le statut particulier que confère aux objets mathématiques, l'utilisation qu'on en fait en sciences exactes et humaines qui commande peut-être une approche plus éclectique de la notion de fonction qui viserait à lui redonner toute sa richesse et complexité. Nous avons voulu, dans ce chapitre, insister sur ce point car il nous apparaît que les traductions entre modes de représentation de variables-fonctions relèvent d'une problématique présentement mise en veilleuse par l'esprit de nos programmes de mathématiques (Janvier, 1993).

Les problèmes mathématiques posés par Janvier et publiés par le Shell Centre (1983) ont eu une grande influence sur les Standards curriculaires du NCTM (http://standards.nctm.org/) et sur les manuels du secondaire, au moins en Espagne. Cette influence a été souvent accompagnée par des activités innovatrices non expérimentées, persistantes aujourd'hui, dans lesquelles les problèmes imaginés par Janvier ont été appliqués hors d'un contexte, sans tenir compte des difficultés inhérentes au changement de représentation des notions mathématiques.

Pour pouvoir déterminer à quel point les professeurs ont été influencés par une certaine confiance empiriste à l'emploi du langage graphique, nous avions sélectionné trois présentations de la limite finie de la fonction en un point : a) sans aucun graphique, b) avec quelques informations sur un graphique et d) avec des informations graphiques plus exhaustives que la précédente. L'hypothèse posée était que les professeurs préféreraient la présentation qui aurait l'information graphique la plus exhaustive. Puisque l'étude des rangs avec seulement trois éléments pose des problèmes de signification statistique, nous avons ajouté une quatrième présentation d'un cas de limite d'une fonction en un point, réalisée par le biais d'un tableau de valeurs, construit à l'aide d'une calculatrice.

2 Contraintes cognitives et d'enseignement

Les contraintes cognitives que nous allons prendre en compte sont en rapport avec les capacités des étudiants. Les contraintes d'enseignement sont en rapport avec le curriculum en cours et avec la présentation des objets mathématiques, en ce qui concerne la limite des fonctions.

2.1 *Le passage de l'algèbre à l'analyse*

Les obstacles rencontrés en didactique de l'analyse aux différents niveaux de l'enseignement secondaire ont été l'objet d'études empiriques. Wilhelmi, Godino et Lacasta (2007) ont réalisé une analyse épistémologique de la notion d'égalité, qui justifie la nécessité d'éviter des phénomènes de *linéarité* et de *réductionnisme.*

> "Brevemente, la linealidad se puede describir afirmando que 'la aritmética precede al álgebra y ésta al análisis'. Se entiende con esto que […] el aprendizaje de cada una establece condiciones previas necesarias para el aprendizaje de la 'siguiente'. El esquema de enseñanza es: Aritmética → Álgebra → Análisis. l reduccionismo se puede describir en los siguientes términos: el álgebra es comprendida como una aritmética generalizada (con letras) y el análisis como un álgebra de funciones […] Estos dos reduccionismos invierten, en la práctica, el esquema anterior: Aritmética ← Álgebra ← Análisis." (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, 111–112)[1].

Cette étude ainsi que d'autres décrivent des difficultés rencontrées dans les processus d'apprentissage et d'enseignement de la limite, selon certains obstacles épistémologiques, tels que le statut de la notion d'égalité et d'autres obstacles liés à la construction de **R** par des suites dans **Q** ou à la densité de **Q** dans **R**.

Les contraintes cognitives des étudiants de ces niveaux sont évidentes. Les résultats PISA (www.pisa.oecd.org) sont un exemple des difficultés d'interprétation, de communication et d'abstraction mathématique des étudiants de 15 ans (3º ESO), au moment où l'on introduit la limite associée aux progressions arithmétiques et géométriques.

2.2 *Traitement curriculaire : présence nominale et présence effective*

Les formulations récentes des curriculums du secondaire espagnol (MEC, 2007a, 2007b) ont été influencées par les contraintes cognitives signalées. Il existe une tendance à éviter le traitement explicite de notions clefs de l'Analyse mathématique et, précisément, de la notion de limite. Dans 3º ESO (14-15 ans) on commence à envisager des situations, dans un contexte algébrique, qui impliquent l'approche « intuitive » de la limite, mais leur intérêt vise la manipulation

[1] « Brièvement, la linéarité peut se décrire comme suit : 'l'arithmétique précède l'algèbre et celle-ci l'analyse'. C'est-à-dire, l'apprentissage de chaque domaine établit des conditions préalables nécessaires à l'apprentissage de la 'suivante'. Le schéma de l'enseignement est donc : Arithmétique → Algèbre → Analyse.
Le réductionnisme peut se décrire de la façon suivante : l'algèbre est conçue comme une arithmétique généralisée (avec des lettres) et l'analyse comme une algèbre de fonctions […] Ces deux conceptions réductionnistes inversent le schéma précédent : Arithmétique ← Algèbre ← Analyse ».

symbolique des expressions formelles de lois générales, plutôt que le comportement « à la limite » de ces lois (MEC, 2007a, 756).

En Classe de Première (16-17 ans) cette « approche » persiste. La notion de limite n'apparaît institutionnellement qu'en Terminale (17-18 ans), liée à « l'étude de phénomènes naturels, technologiques et sociaux » (MEC, 2007b, 45451 et 45476), en mathématiques pour la filière scientifique et aussi en mathématiques adaptées aux sciences sociales.

3 Adéquation didactique et phénomènes didactiques

La notion d'adéquation didactique, en tant que critère systémique d'adéquation d'un processus d'étude en mathématiques au projet d'enseignement, est un instrument pour l'analyse du rôle du savoir dans le système didactique et pour l'identification et la description des phénomènes associés.

3.1 Adéquation didactique

L'Approche Ontologique et Sémiotique (AOS) (Godino, Batanero et Font, 2007) établit des critères d'évaluation de l'adéquation des processus d'étude des mathématiques. La structure de ces critères porte sur trois dimensions (Godino, Wilhelmi et Bencomo, 2005, 2–3), formulables de cette manière :

- *Adéquation épistémologique*, qui exprime l'adéquation entre les connaissances enseignées et le savoir visé.
- *Adéquation cognitive*, qui permet l'évolution des stratégies de base vers les connaissances visées.
- *Adéquation d'enseignement,* qui permet au professeur et aux élèves d'identifier des conflits sémiotiques et de les résoudre par le biais de la *négociation de signifiés*, évaluant la pertinence, le coût ou l'efficacité des notions, des processus et des signifiés mathématiques.

L'*adéquation didactique* est le résultat de l'intégration de ces adéquations partielles et, par conséquent, elle implique la prise en compte des interactions entre elles. En dernier ressort, l'objectif de l'adéquation didactique est celui d'avoir un enseignement « de qualité ». En fait, notre expérimentation fournit des informations sur « la connaissance mathématique pour l'enseignement (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) » du professeur, qui conditionne la qualité de l'enseignement (Hill et al., 2008).

Les aspects fondamentaux de l’adéquation didactique peuvent être représentés par un triangle équilatère (contour d’adéquation maximale) et par un hexagone irrégulier interne (les adéquations réussies). Le tracé des côtés de l’hexagone est en général cerné par les absences observées. Les côtés du triangle représentent un idéal établi dans une institution au préalable de manière arbitraire (tamisé par le fondement théorique et le contraste expérimental).

La figure 1 représente un cas fictif d’adéquation didactique à un moment donné, dans une institution concrète, où :

- Les niveaux de l’adéquation épistémologique et de l’adéquation d’enseignement sont élevés, de telle façon que la planification et l’évaluation —qui sont, par rapport au savoir, des activités fondamentales du professeur— sont très satisfaisantes.
- Le niveau de l’adéquation cognitive est moyen, ce qui limite extrêmement la construction et la communication des savoirs par les étudiants, dont l’implication est assez faible.
- Puisque les étudiants montrent des difficultés dans la construction et la communication des savoirs, les interventions du professeur à l’occasion de la négociation du signifié du savoir mathématique prédominent sur les actions des étudiants.

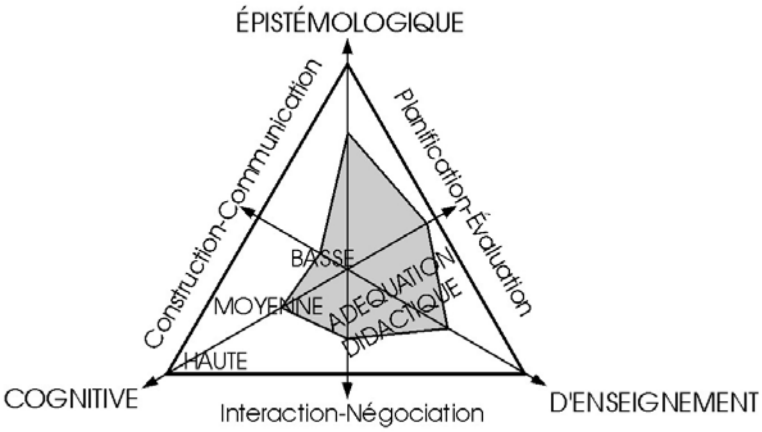


Figure 1 : Dimensions de l’adéquation didactique

3.2 . Épistémologie spontanée du professeur

Les décisions du professeur visent, d’une manière « spontanée », l’adaptation de son activité aux conditions (contraintes et possibilités) cognitives, épistémologiques et d’enseignement. Ces décisions sont basées sur son expérience et sur sa *mémoire didactique*. Brousseau et Centeno (1991) ont montré que le contrat didactique convenable pour cette mobilisation repose sur la *mémoire didactique* du professeur et celle du système. Cette mémoire permet au professeur d'utiliser le passé particulier de la classe et de gérer l'articulation des apprentissages particuliers par rapport à l'histoire de la classe et des élèves. Par conséquent, l'épistémologie spontanée[2] et la mémoire didactique sont des clefs pour interpréter les décisions du professeur en vue de la détermination de processus adéquats d'étude des mathématiques.

3.3 Glissement métacognitif et glissement métadidactique

Lorsqu'une tentative d'enseignement échoue, c'est-à-dire, lorsque la transmission de l'objet mathématique prétendu ne se réalise pas, le professeur est parfois conduit à reprendre son texte pour l'expliquer à nouveau et le compléter le cas échéant. Parfois, cette première tentative, qui n'est à l'origine qu'un moyen d'enseignement, devient objet d'étude et éventuellement aussi objet d'enseignement. Alors la forme substitue au fond. Une activité mise en rapport avec une notion que l'on n'a pas réussi à transmettre, devient le seul objectif prétendu par le professeur.

> « Le *glissement métacognitif* est le remplacement d'une connaissance par un de ses modèles par une description en métalangage. Le *glissement métadidactique* est le processus didactique qui conduit à l'utilisation didactique effrénée du glissement métacognitif. » (Brousseau, 2003, 7).

Assez souvent ces glissements sont provoqués —de manière implicite et même inconsciente— par les professeurs. À la recherche de processus d'étude adéquats, ils privilégient la dimension cognitive et la dimension d'enseignement, au détriment de la dimension épistémologique.

3.4 Illusion de la transparence et ostension

Le glissement métadidactique entraîne l'hypothèse que le modèle utilisé soit porteur du signifié « global » de la notion ; c'est-à-dire, qu'il permette un accès direct à la notion. Autrement dit, le choix du modèle répondrait à un soi-disant critère d'adéquation cognitive. Il s'agit du phénomène de *l'illusion de la* transparence : les élèves ne voient dans le modèle qu'un exemple, tandis que le professeur l'interprète en tant que « modèle ». Par conséquent, la dualité *particulier*

[2] Le statut acquis par le professeur « spontané » ne lui permet pas de passer d'un rôle d'*assistant à l'étude* à celui de *directeur d'étude* et à celui d'*enseignant* (Espinoza et Azcárate, 2000, 359).

- *général* n’est pas prise en compte (Godino, Batanero et Font, 2007). De même, la transparence entraîne la *présentation ostensive,* où un exemple substitue à la notion mathématique. Le professeur fait confiance d’une façon abusive (et illusoire) aux vertus de l’exemple pour transmettre la notion[3].

4 Méthode

4.1 Groupe des professeurs enquêtés

Les professeurs ont été choisis de manière non aléatoire. L’information extraite de l’analyse statistique a donc un caractère prédominant descriptif – interprétatif. Les résultats de l’étude ne peuvent pas donc être généralisés en raison de la taille des groupes examinés dans chaque pays. Nous avons considéré 4 secteurs homogènes intragroupe et hétérogènes intergroupe :

- Groupe de 23 professeurs du secondaire qui ont répondu au questionnaire en 1995 en Espagne.
- Groupe de 28 professeurs du secondaire en 2010 en Espagne.
- Groupe de 33 professeurs stagiaires qui ont répondu au questionnaire en 2009 en France, à l’*Institut Universitaire de Formation des Maîtres* (IUFM) d’Aquitaine.
- Groupe de 20 professeurs en activité et en formation à la *Georgia State University* (USA).

L’étude fournit donc une information *longitudinale* (variation des réponses au cours du temps en Espagne) et une information *transversale* (variation selon le secteur visé, surtout la différence entre les réponses les plus récentes en Espagne et les réponses en France).

4.2 Questionnaire : quatre présentations de la limite de fonctions

Quatre présentations de la limite d’une fonction en un point, extraites de manuels différents, sont données aux professeurs, qui doivent les ranger selon leur « intérêt didactique ». Le questionnaire posé se trouve à l’Annexe I. Le tri des 4 présentations de la limite obéit aux 4 critères suivants :

Graphisme. Présentation de la notion à l’aide de graphiques.

Tableau de valeurs. Représentation du comportement de la fonction par un ensemble fini de valeurs « suffisamment représentatives ».

---

[3] Cet usage de l’ostensif est différent des usages propres de la Théorie Anthropologique (Bosch et Chevallard, 1999) et de l’AOS (Godino, Batanero y Font, 2007).

Ostension. Présentation de la notion à l’aide d’un exemple, considéré comme prototypique de la classe d’objets qu’il représente (fonctions réelles de variable réelle).

Adéquation épistémique. Adéquation entre la présentation et le savoir. Valorisation dichotomique : 1 (présentation conforme à la définition de la limite) ; 0 (absence d’adéquation au savoir).

La présentation A n’a pas de graphique et elle correspond à un manuel approprié à des étudiants de première année de DEUG scientifique (Spivak, 1975). Cette présentation est limitée à la définition rigoureuse de la limite et n’a pas de caractère ostensif, puisqu’elle se réfère à une fonction générique *f*, mais à aucune fonction concrète ni à une classe de fonctions.

La présentation B contient une fonction concrète, continue et croissante dans un voisinage du point, déterminée par son graphique. Elle est extraite d’un manuel approprié à des étudiants du secondaire de 16 ans (De Guzmán, 1987).

La présentation C n’a pas de représentation graphique et ne définit pas la notion de limite. Le manuel (Santos, 1988) est adapté aux élèves de la filière littéraire de la Terminale espagnole (18 ans) et il doit suivre les dispositions officielles, qui exigent une présentation « intuitive » de la limite. On ne peut y lire seulement que le concept de limite d’une fonction pour x tendant vers a est en rapport avec la question « quelle est la valeur vers laquelle tendent les valeurs $f(x)$ quand la variable indépendante se rapproche de a ? ». On présente un tableau de valeurs obtenues « à l’aide d’une calculatrice ».

Finalement, la présentation D utilise le graphique avec une correspondance exhaustive des éléments de la définition (« $\varepsilon-\delta$ »). Elle est extraite d’un manuel de Calcul utilisé en 1ère année de DEUG scientifique (Larson, 1989).

Le tableau 1 décrit de façon succincte les quatre présentations, selon les critères établis plus haut, ainsi que les manuels de référence cités plus haut et le niveau académique envisagé (secondaire et université).

Le critère d’adéquation épistémique est absent seulement dans la présentation C ; il y a deux présentations *graphistes* (B et D), deux *ostensives* (B et C) et la seule présentation qui s’appuie sur un tableau de valeurs est C.

Tableau 1 : Description des présentations de la limite triées

Présentation	Manuel	Niveau	Graphisme	Tableau	Ostension	Adéquation épistémique
A	Spivak	U – Scientifique	0	0	0	1
B	De Guzmán	Première	1	0	1	1
C	Santos	Terminale (Filière littéraire)	0	1	1	0
D	Larson	U - Ingénierie	1	0	0	1

La figure 2 représente le rapport au savoir des quatre critères :

- L'adéquation *épistémique* est donnée par des flèches verticales continues, dont l'épaisseur exprime la quantité d'éléments du langage formel présents.
- Le *graphisme* est indiqué par une flèche discontinue ; l'extrémité est fermée si le graphique permet la transmission du savoir ; si le graphique n'est qu'une illustration ostensive, l'extrémité est ouverte.
- La présence du *tableau de valeurs* est représentée par une flèche pointillée à bout ouvert.
- L'*ostension* est représentée par des flèches tangentes au savoir qui n'arrivent pas à transmettre la définition de la limite.

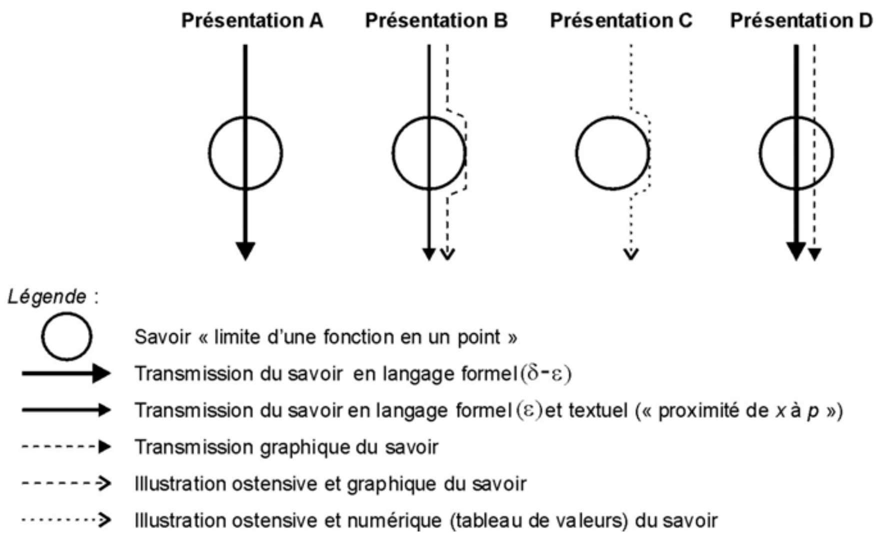


Figure 2 : Transmission du savoir et ostension dans les présentations de la limite

Même si la présentation ostensive ne permet pas en soi d'arriver à transmettre la définition formelle de la limite, son extension, suivant exhaustivement les cas possibles (limite de fonctions continues et discontinues de toute espèce) pourrait arriver à permettre une transmission effective du savoir.

4.3 Méthodes statistiques mises en œuvre pour la construction et le traitement des données

L'étude des données est réalisée en deux phases[4] :

1. Analyse du rang attribué aux quatre présentations.

Histogramme de fréquences de choix pondérées. Nous avons attribué un poids 4 à la présentation rangée en première position, suivie d'un poids de 3 pour la deuxième, 2 pour la suivante et finalement 1 pour la dernière.
Test non paramétrique de corrélation de rang W de Kendall et sa preuve de signification. Il permet de déterminer s'il existe un accord sur un ordre préférentiel, à un seuil de probabilité donné.

2. Analyse des relations entre les variables constitutives de la population explorée et les variables extraites du rang octroyé aux quatre présentations.

Arbre hiérarchique de similarité. Il montre la relation symétrique de similarité entre variables, selon leur intensité.
Graphique implicatif. Il détermine l'implication statistique entre variables aux seuils de signification fixés.

Les variables prises en compte dans cette deuxième phase sont dichotomiques (1 : présence ; 0 : absence) et elles ont été traitées de la même manière, mais elles sont de deux types différents :

Variables non contingentes :
Pays d'origine : Espagne (Esp), France (Fra), États-Unis d'Amérique (USA).
Professeurs en formation (PF).
Variables contingentes qui expriment des informations tirées des rangs :
GRAF : les présentations graphiques (B et D) sont choisies en premier ou deuxième rang ; autrement dit, cette variable acquiert la valeur 1 quand les rangements commencent par BD ou DB.

[4] La pertinence des approches statistiques est suivie de l'article « Statistique de rangs et analyse statistique implicative ». Dans ce travail, Régnier et Gras (2005) discutent l'apport de l'analyse statistique implicative (Gras et al., 2008) à l'étude de la concordance-discordance des rangs accordés par des juges à des objets.

OST : les présentations ostensives (B et C) sont choisies en premier et deuxième rangs ; autrement dit, cette variable acquiert la valeur 1 quand les rangements commencent par BC ou CB.

DB : le rang de D précède celui de B dans le rangement.

BD : le rang de B précède celui de D dans le rangement.

E1c : la présentation C est choisie en premier rang.

E4a : la présentation A est choisie en dernier rang.

cxxa : la présentation C est choisie en premier rang et la présentation A est choisie la dernière.

De plus, nous ajoutons quelques déclarations ponctuelles des professeurs, en vue de mieux interpréter leurs décisions.

4.4 Considérations techniques sur l'utilisation de CHIC

Même si la version 4.2 de CHIC fournit des graphiques implicatifs très nets d'une manière automatique, sans intervention manuelle, nous avons préféré utiliser la version 0.6, parce que, si le nombre de variables n'est pas excessif, il est possible d'obtenir un réseau implicatif suffisamment net, moyennant des déplacements horizontaux des variables. Ce procédé entraîne l'avantage de conserver leurs occurrences sur une échelle verticale.

5 Analyse statistique des rangements

5.1 Comportements attendus ; hypothèses

Dans l'enseignement de l'Analyse au niveau de l'école secondaire, il arrive souvent qu'à un moment le professeur attende que les élèves sachent quelque chose alors qu'ils ne répondent pas. C'est-à-dire, les processus d'apprentissage et d'enseignement se bloquent fatalement. Alors, ce qui est avantageux c'est l'utilisation d'un moyen d'enseignement qui permette de sortir des blocages. Les professeurs pensent-ils que le graphique est un élément privilégié pour éviter les blocages ?

Les comportements espérés par rapport aux critères établis dans la section 3.1 sont :

Graphisme. À la suite de l'influence des traitements graphiques sur le curriculum (section 1), il est très probable que les professeurs préfèrent les présentations graphiques (D et B), puisque le graphique permettrait de « voir » les caractéristiques globales de la fonction, qui seraient plus difficiles à interpréter à partir de sa formule ou d’un tableau de valeurs.

Ostension. La préférence de D par rapport à B entraînerait la considération en premier rang d’une représentation « générique » de la notion de limite, puisque en D on peut apprécier un schéma du comportement de la fonction au voisinage d’un point. Par contre, ranger B en premier met en évidence l’idée que montrer un exemple de fonction avec une courbe particulière est « suffisant » et « plus simple » pour la présentation de la notion (ostension en B). La présentation C —non graphique— a aussi un caractère ostensif.

Adéquation épistémologique, cognitive et d’enseignement. Le critère d’adéquation épistémique sera mis en valeur forcément en interaction avec les adéquations cognitives et d’enseignement. On peut s’attendre à ce que la présentation A soit reléguée pour un « formalisme excessif » ; de telle manière que C, même si elle est ostensive (puisqu’elle montre le tableau d’une fonction concrète), même si elle n’est pas adéquate du point de vue épistémique (elle ne définit pas la limite), serait préférée à A.

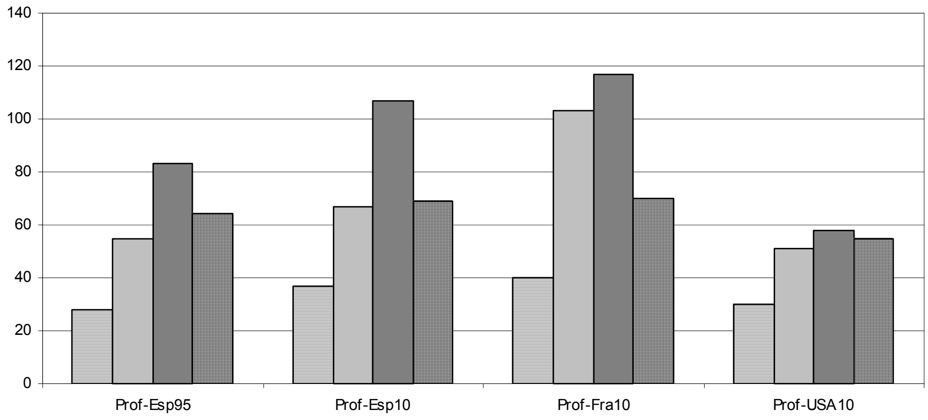
D’une part, il y a des raisons pour s’attendre à ce que les professeurs privilégient les présentations graphiques. En plus, puisque la présentation D contient des éléments graphiques plus abondants que B et la correspondance avec la définition formelle est plus exhaustive, D doit précéder B.

D’autre part, la présentation C n’a pas de composantes graphiques, mais elle permet une manipulation intuitive de la notion par des calculs numériques. A sera donc reléguée au dernier rang à cause de l’absence d’éléments explicatifs, intuitifs ou manipulables.

Nous adoptons donc l’hypothèse que : *le rangement préféré sera DBCA.*

5.2 Résultats

La figure 3 montre l’intérêt didactique de chaque présentation comme somme des poids des rangs donnés à chaque présentation par les professeurs de chaque secteur (poids 4 pour la présentation rangée en premier, 1 pour la dernière).



Légende :

Présentation A
Présentation B
Présentation C
Présentation D

Figure 3 : Intérêt didactique pour chaque groupe

Homogénéité des opinions des professeurs

Les professeurs enquêtés donnent de simples rangements, sans autres propriétés numériques. D'ailleurs il n'est pas légitime de supposer que les données analysées soient extraites d'une population distribuée normalement ni que les groupes satisfassent la propriété d'homoscédasticité (de variance identique). Ces circonstances empêchent l'utilisation de la statistique inférentielle paramétrique, mais il est possible d'appliquer une « preuve de rang » non paramétrique pour des « distributions libres » : le test de signification du coefficient de corrélation W de Kendall (Siegel, 1990). Le test non paramétrique du coefficient W de Kendall précise le calcul préalable du coefficient S :

$$S = \sum_{i \in I} S_i \quad \text{où} \quad S_i = \left(R_i - \frac{\sum_{i \in I} R_i}{N} \right)^2 \quad (R_i;\ i \in I;\ I = \{A, B, C, D\})$$

où N est le nombre d'objets à ranger ($N = 4$; nombre de présentations) et R_i sont les rangs donnés par les professeurs à chacune des présentations.

Nous rappelons encore que le coefficient W de concordance de Kendall est :

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} k^2 (N^3 - N)}$$

W exprime la distance entre le modèle de l'hypothèse nulle (les rangements se distribuent au hasard) et la distribution des rangements observés. Le coefficient W varie entre 0 et 1. Plus proche de 1 est la valeur de W, plus la distribution observée s'approche de la concordance parfaite.

Le tableau 2 ci-dessous donne les valeurs empiriques du coefficient W et de la statistique S suivant les groupes.

L'hypothèse nulle envisagée est : « Les professeurs n'ont pas une conception homogène du type de présentation de la notion de limite qui entraînerait un plus grand intérêt didactique ou une plus grande facilité d'explication et de compréhension. Ils ont donc rangé les présentations au hasard. Chacune des présentations a les mêmes probabilités d'occuper une place quelconque avec chaque professeur ».

Pour la statistique W, la valeur critique au seuil de risque α =0.05, quand N>7 (N est le nombre d'objets, k est le nombre de critères), peut être obtenue à partir de la variable du $\chi 2$ (ddl=N–1) dans la mesure où la variable $k\,(N\text{–}1)$W est approximativement ainsi distribuée. Ainsi la valeur critique pourrait être obtenue par $w_c = \dfrac{7{,}81}{k(N-1)}$. Comme N=4, en retournant à la statistique S, nous pouvons recourir aux tables fournies par Kendall (Lecoutre & Tassi, 1987 p.428) dans lesquelles la valeur critique au seuil de risque α =0.05, pour N=4 et k=20, est de 258. Mais nous préférons nous appuyer sur une autre approximation. Il est établi que la statistique $\dfrac{W}{1-W}$ suit approximativement une loi β_{II}(p ; q) puis la statistique $\dfrac{p}{q}\dfrac{W}{1-W}$ suit approximativement une loi de Fischer Snedecor F(2p ; 2q). Il s'en suit que $\dfrac{(k-1)W}{1-W}$ admet pour loi approchée $F(\nu_1 = n-1-\dfrac{2}{k};\nu_2 = (k-1)\nu_1)$.

Tableau 2a : Poids globaux, coefficients W, statistique S et valeurs de critiques w_c

Pays	**Groupes**	R_A	R_B	R_C	R_D	S_A	S_B	S_C	S_D
Espagne	Pr-Esp95	28	55	83	64	870,25	6,25	650,25	42,25
	Pr-Esp10	37	67	107	69	1089	9	1369	1
France	Pr-Fra09	40	103	117	70	1806,25	420,25	1190,25	156,25
USA	Pr-USA10	30	51	58	55	400	1	64	25

Tableau 2b : Poids globaux, coefficients W, statistique S et valeurs de critiques w_c

Pays	**Groupes**	**k**	**N**	***S***	**W**	**Wc** *(approximation par* F*)* α=0.05	**Wc** *(approximation par* F*)* α=0.01
Espagne	Prof-Esp95	23	4	1569	0,5932	0,1249	0,18376416
	Prof-Esp10	28	4	2468	0,6296	0,1033	0,15319049
France	Prof-Fra09	33	4	3573	0,6562	0,08814	0,13133982
USA	Prof-USA10	20	4	490	0,2450	0,14275	0,20877011

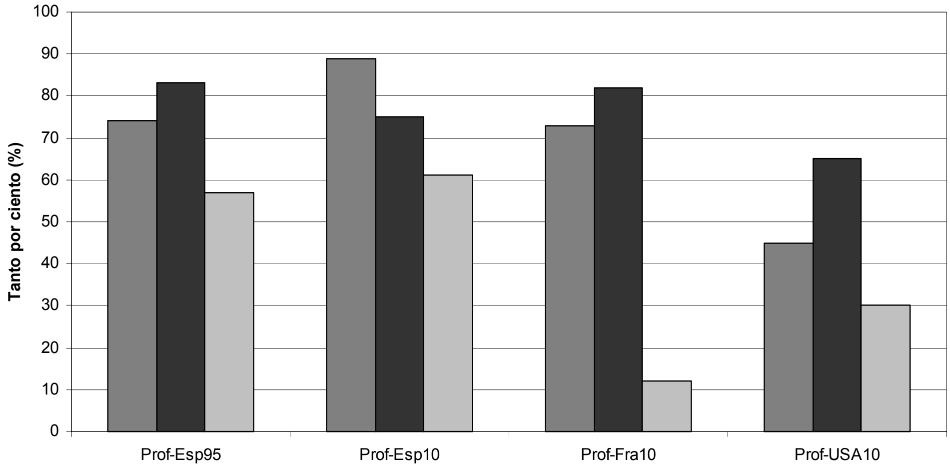
À la lecture des résultats fournis dans le tableau 2 (2a-2b), il ressort que au seuil de risque α=0,01, l'hypothèse Ho peut *être rejetée* au profit de l'existence d'une tendance à une conception homogène intragroupe sur le rangement de l'intérêt didactique des 4 présentations de la notion de limite.

Tableau 3 : Rangements concordants

Pays	**Groupes**	R_A	R_B	R_C	R_D
Espagne	Pr-Esp95	4	3	1	2
	Pr-Esp10	4	3	1	2
France	Pr-Fra09	4	2	1	3
USA	Pr-USA10	4	3	1	2

En examinant le tableau 3, il apparaît que la présentation C est la préférée pour tous les groupes ; C occupe le premier rang dans 70% des rangements de tous les groupes. Presque 90% des professeurs espagnols la rangent en premier en 2010, tandis que la présentation A est reléguée par plus de 60% de tous les professeurs. 70% de tous les professeurs choisissent les rangements CDBA ou CBDA. La figure 4 montre aussi que la différence entre les groupes est surtout l'ordre relatif B et D. À peu près 60% des professeurs espagnols rangent D devant B, tandis que cet ordre relatif n'est décidé que par 10% à peu près des professeurs en formation français.

Intensité de la concordance entre les professeurs et significativité des rangements



Légende :

E1C : rangements qui commencent par C.
E4A : rangements qui finissent par A.
DB : D précède B

Figure 4 : Rang de A et C et ordre relatif B-D

Les valeurs du tableau 2 permettent de conclure que l'idée que les professeurs ont de l'« intérêt didactique » est concordante ; il en est de même pour la « facilité d'explication et de compréhension ».

5.3 Brève discussion des résultats

On observe donc la préférence pour la présentation tabulaire C, au détriment des graphiques, ce qui contredit la prédominance des présentations graphiques prévue dans l'hypothèse (« L'ordre préféré est DBCA »). Cependant, la mise à l'écart de la définition A —dépourvue de tout support graphique ou numérique— est soutenue.

L'option C représente un milieu où l'étudiant pourrait interagir, par le biais de la calculatrice, plus facilement qu'avec le graphique, ce qui facilite la négociation du signifié par le professeur. La dimension cognitive et la dimension d'enseignement sont donc privilégiées visant une adéquation didactique. Même si la présentation C ne contient pas de définition de limite, même si elle présente un glissement métadidatique, sa préférence ne doit pas être interprétée d'une manière alarmiste ni, bien sûr, elle ne doit pas être l'objet d'une critique abusive des enseignants. Il faut prendre en compte que les décisions des professeurs par rapport à la gestion de la notion de limite sont influencées par les contraintes cognitives des étudiants et par le traitement de cette notion dans le curriculum. En particulier, au moins en Espagne, les programmes officiels du secondaire montrent un renoncement implicite à l'introduction de la limite des fonctions. De même, dans la présentation C « $f(a)$ » n'existe pas, ce qui évite la résolution par remplacement de la valeur « a » dans la fonction f et montre la nécessité des méthodes spécifiques de calcul. Ces méthodes-ci doivent empêcher la confusion entre la limite et la continuité.

L'option C contribue à l'*adéquation cognitive* et à l'*adéquation d'enseignement*, car elle décrit une situation qui permet une stratégie de base pour les étudiants (*adéquation cognitive*) et la possibilité d'affronter les notions du curriculum avec un coût relativement bas (*adéquation d'enseignement*). Néanmoins, l'application de cette stratégie n'assure pas *per se* le passage de la connaissance « approximation numérique tabulaire » au savoir visé « limite des fonctions », c'est pourquoi on peut parler d'une basse adéquation épistémologique. En plus, il existe le risque de transmettre la connaissance fausse selon laquelle « si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, alors $f(a)$ n'existe pas ».

La présentation C est un exemple d'enseignement ostensif : par le biais d'une table de valeurs, où l'« on peut apprécier la tendance de la limite », on « montre » quelle « est » la limite. La systématisation de la présentation C dans un processus d'étude peut mener l'enseignement à un point tel qu'il soit fort difficile d'éviter un glissement métadidactique. Étant donné qu'une réduction épistémologique entraîne une limitation fondamentale pour le développement d'une notion, on peut assurer que ce glissement-ci réduit sérieusement l'adéquation didactique.

5.4 Quelques justifications explicites

Dans la figure 5, nous rapportons différentes raisons apportées par six professeurs (2 Espagnols, 2 Français et 2 Américains) pour justifier leur rangement donné. En cinq sur six rangements, la représentation C est choisie en premier rang et la présentation A en dernier rang, car ceci est le choix le plus large (70% sur le total de professeurs).

Espagne (Esp)

- *CDBA*. "*Me gusta más la opción C, que aunque es la más simple, se entiende de forma muy intuitiva el concepto. Después están las más formales que yo ordenaría de la siguiente manera: D que lo explica bastante bien; B, menos explicada; y por último, A (sólo la definición)*." (Je préfère l'option C, bien qu'elle est la plus simple, on comprend très intuitivement le concept. Ensuite on trouve les options plus formelles, que je rangerais comme ça : D, qui donne une explication assez bonne ; B, moins expliquée ; et, dernièrement, A (juste la définition).)
- *CBDA*. "*C: más concreto; B: esquema más claro que D; luego, D y, por último, A (demasiado abstracto, incluso para la universidad si no se explica)*." (C : plus concrète ; B : schéma plus clair que D ; D et, dernièrement, A (trop abstract, même pour l'université si ne s'enseigne pas).)

France (Fra)

- *CBDA*. « C : *sur un exemple, c'est plus facile de comprendre la notion ; B : le dessin est bien fait ; puis D ; et, finalement, A : trop court*. »
- *CDBA*. « *Du plus délayé au plus concis*. »

États-Unis (USA)

- *CABD*. "*C: it gives enough detail; A: it's straight to the point; B: the graph can be a little confusing; D: too much info to get confused about*". (C : donne suffisamment de détails ; A : va droit au but ; B : le graphique est un peu confus ; D : trop d'information pouvant conduire à de la confusion).
- *CDBA*. "*C: it introduces what a limit is, for people who are learning it for the first time; D: after understanding what 'C' is 'D' gives a formal background of the concept; B: after understanding 'C' and 'D', B gives a vivid description of what a limit does; A: even though this definition is correct, the explanation doesn't say much of anything regarding the limits. Need more details and examples*". (C : ça introduit ce qui est une limite pour ceux qui l'apprennent pour la première fois ; D : ensuite de l'apprentissage du signifié de 'C' , 'D' fournit une explication formelle du concept ; B : après la compréhension de 'C' et de 'D', 'B' fournit une explication déjà vécue sur le fonctionnement de la limite ; A : même si cette définition est correcte, l'explication ne dit presque rien sur les limites. Elle a besoin plus des détails et des exemples.)

Figure 5 : Quelques justifications explicites

6 Analyse statistique implicative

Les diagrammes de fréquences et le test non paramétrique W de Kendall ont permis d'assurer que le rangement donné par les professeurs n'est pas dû au hasard ; autrement dit, il existe une tendance à un accord sur l'ordre de l'intérêt didactique des 4 présentations de la notion de limite. Ces techniques ont aidé encore à pondérer l'influence de chaque présentation. Ainsi on a pu tester l'hypothèse de travail (« l'ordre préféré est DBCA »), qui envisageait une préférence des présentations avec des graphiques. La preuve empirique souligne la préférence pour les présentations ostensives, avec éléments graphiques ou non. La mise en place des corrélations et des implications entre les critères sous-jacents à la détermination du rangement donné par les professeurs, exige la définition de certaines variables. Nous avons défini (section 4.3) 7 variables principales, basées sur le rangement des professeurs, et 4 variables supplémentaires : trois qui expriment l'origine géographique des professeurs et une pour distinguer les professeurs en formation initiale ou continue des professeurs en exercice.

L'Analyse Statistique Implicative (ASI) (Gras, Suzuki, Guillet et Spagnolo, 2008) (Gras, Régnier et Guillet, 2009) fournit des instruments pour l'étude plus précise de la contingence. L'arbre hiérarchique de similarité illustre des relations symétriques de proximité entre les variables selon leur intensité, tandis que le graphe implicatif représente l'implication statistique entre variables avec un indicateur de significativité au moyen de seuils préfixés par l'utilisateur. L'implication statistique est une relation asymétrique qui permet l'établissement d'une hiérarchie des variables et, par conséquent, la définition plus précise de leur rôle dans le contexte de référence.

6.1 Arbre hiérarchique de similarité

Il existe des relations triviales entre les variables, qui sont à l'origine de la définition des variables elles-mêmes, et des relations empiriques, fruit de la contingence (figure 6).

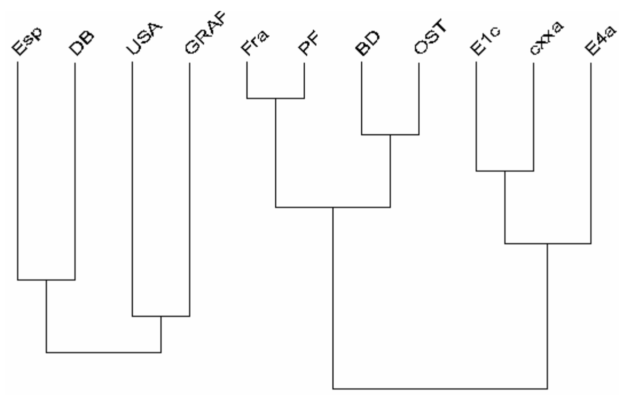


Figure 6 : Arbre hiérarchique de similarité

Relations triviales

{Fra, PF} : la plupart des professeurs en formation initiale sont Français, bien qu’il y ait parmi eux des Espagnols et des Américains ;
{E1c, cxxa} et {{E1c, cxxa}, E4a} : le choix en premier rang de la présentation C et en dernier rang de la présentation A est évidement liée à la variable « cxxa ».

Relations empiriques

{BD, OST} : la variable BD vaut 1 si la présentation B précède la présentation D et la variable OST vaut 1 si les rangements commencent par BC ou CB ; par conséquent, la conception ostensive est plutôt liée à la préférence de B qu’à celle de C. En fait, le lien avec les variables « E1c » et « cxxa » est très faible ;
{{Fra, PF}, {BD, OST}} : les professeurs français sont liés de préférence à la présentation ostensive B ;
il y a un manque de similarité de la variable « USA » avec les autres variables. On peut justifier ce fait par l’hétérogénéité des Américains interrogés, car il y avait parmi eux, des professeurs en formation initiale et continue (étudiants en Didactique des Mathématiques de troisième cycle universitaire), de différents âges, étudiants d’une maîtrise de filière scientifique qui, même s’ils n’ont pas encore opté pour l’enseignement, sont les candidats potentiels pour cette profession ;
{Esp, DB} : le seul lien des professeurs espagnols, bien que faible, apparaît avec la préférence de la présentation D sur la présentation B.

6.2 Graphe implicatif

Il existe encore des relations triviales entre les variables, qui sont à l’origine de la définition des variables elles-mêmes, et des relations empiriques, fruit de la contingence (figure 7).

Relations triviales

Implications entre les variables « E1c », « E4a » et « cxxa ». Ces implications montrent le fait évident suivant : l’ensemble de professeurs liés à la variable « cxxa » est l’intersection entre l’ensemble de professeurs qui choisissent en premier rang la présentation C et l’ensemble de professeurs qui choisissent en dernier rang la présentation A ;
l’implication « Fra → PF » souligne que tous les professeurs français du groupe enquêté sont en formation initiale.

Relations empiriques

Il n'y a que fort peu de réponses graphistes (GRA) ; c'est-à-dire, des réponses qui commencent par BD ou DB ;

les professeurs américains (USA) ne sont pas liés implicativement aux autres variables, au contraire de ce qui arrive aux professeurs espagnols (Esp) ou français (Fra) ;

même si PF → OST et OST → E1c, il n'y a pas d'implication transitive PF → E1c, même pas au seuil de signification du 90% ;

Fra → OST et PF→ OST; autrement dit, l'ensemble de professeurs « ostensifs » contient la quasi-totalité de professeurs français et en formation initiale. Ce fait est vraiment éclairant, car la fréquence de la variable OST est inférieure au 50% ;

même si Esp → E1c, OST → E1c et E1c→ E4a , il n'y a d'implications transitives ni Esp → E4a ni OST → E4a, même pas au seuil de signification du 90%.

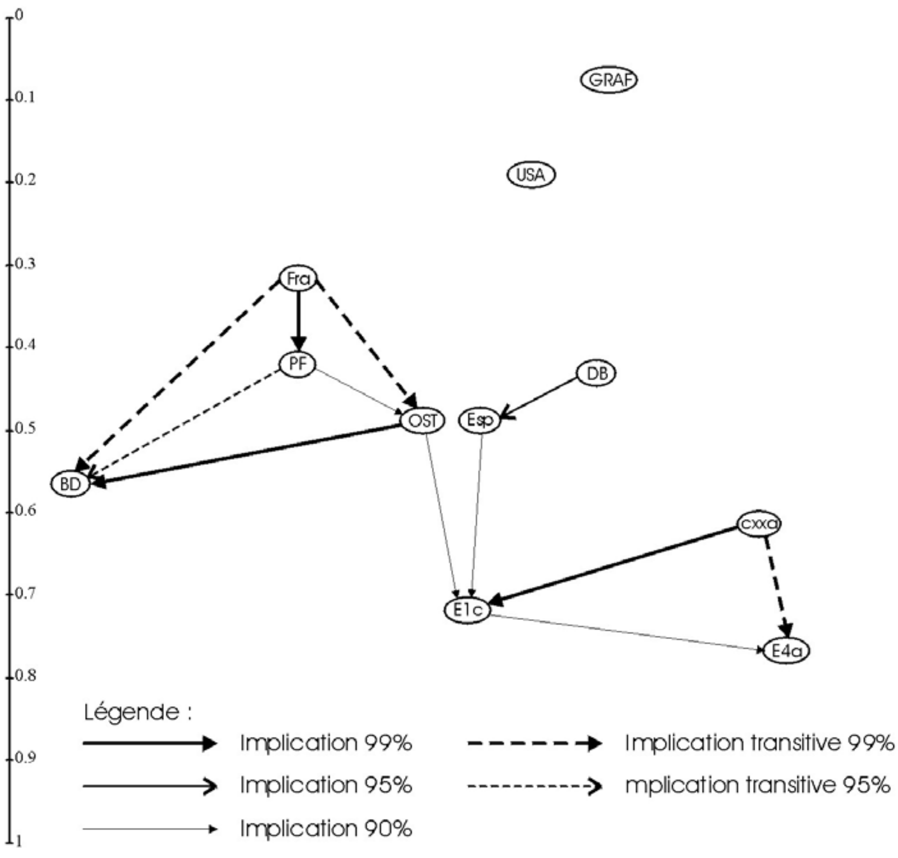


Figure 7 : Graphe implicatif

7 Conclusions

Les professeurs préfèrent les conditions (graphiques ou non) qui permettent le plus un contrat didactique d'ostension. L'usage de graphiques n'est pas *per se* ni problématique ni fournisseur d'acquisition de connaissances impliquées. Ce n'est pas donc un fait —ou, le cas échéant, un phénomène— didactique qu’il faut éviter ou promouvoir, mais qu’il faudra mettre en valeur selon le contexte, l’usage et l’adéquation au processus d’étude visé ou effectivement mis en place. Cependant, il faut absolument éviter l’ostension. Il est évident que cette affirmation ne suppose pas le besoin de restreindre la présentation d’une notion —son introduction et son développement— à sa formulation formelle, mais plutôt de prendre conscience que n’importe quel exemple, si spécifique et si bien choisi quel soit, n’est qu’un exemple d’un ensemble d’objets.

L’analyse statistique implicative a permis de mettre en évidence des conclusions qui nuancent les résultats obtenus par le biais d’autres moyens. Ainsi il apparaît le rôle particulièrement important de la préférence pour des présentations ostensives, bien que sa fréquence soit relativement faible, ou encore que l’ensemble des professeurs qui choisissent en premier rang la présentation ostensive C (E1c) regroupe la plupart des professeurs (à l’exception de ceux qui sont entièrement « graphistes » et des Américains). Par ailleurs, on pourrait penser que le choix de la présentation A en dernier rang (E4a) est plus représentatif que le choix de la présentation C en premier rang (E1c), car ce choix-là a la plus haute fréquence, mais, étant donné que cette fréquence n’implique pas de relation implicative transitive entre l’ostension (Ost) et les professeurs espagnoles (Esp), on peut assurer que la variable « E4a » n’est pas décisive.

7.1 Considérations techniques de l’usage de CHIC

La version 0.6 respecte les fréquences des variables, tandis que la version 4.2 en fait abstraction. En plus, cette dernière version supprime toutes les variables qui n’ont pas de liaisons implicatives ; alors, des résultats non triviaux et contingents tels que la faible fréquence des variables GRAF et USA et l’isolement de ces variables —manque de liaisons implicatives—, il aurait fallu les détecter en marge de CHIC.

Soit δ la valeur de vérité d’une variable (1 : vrai ; 0 : faux) et soient « p » et « q » deux variables quelconques ; l’implication statistique « $p \rightarrow q$ » est définie telle que « $\delta(p) = 1 \wedge \delta(q) = 0$ » est improbable, selon le seuil de signification choisi.

Une variable dont la fréquence est très haute sera représentée par un vecteur avec un grand nombre de « 1 » (qui révèlent sa présence). Par conséquent, il est probable que cette variable soit impliquée par un autre de plus faible fréquence. La présence de la fréquence des variables dans les graphes implicatifs fournit donc un critère supplémentaire pour évaluer l’importance des implications ou, le cas échéant, de l’absence d’implications.

Par conséquent, l’explication des fréquences sur le graphe implicatif nous a permis de souligner le véritable rôle central de la variable ostensive (OST). D’ailleurs, étant donné que l’impression en noir et blanc est toujours prédominante dans la diffusion des documents de recherche, il serait intéressant que la transformation par l’utilisateur du code de couleurs donné par défaut en CHIC, qui représente les seuils de signification implicative (0.99, 0.95 et 0.90), en un code noir et blanc avec différentes épaisseurs des flèches, soit aussi effective pour les implications transitives.

Remerciements

Recherche réalisée dans le cadre du projet : SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

Références

Bosch M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs: objet d’étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(1): 77–124.

Brousseau G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. [Disponible 15 marzo 2010 : //pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau].

Brousseau G.; Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l’enseignant. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3), 167–210.

De Guzmán, M. (1987). *Matemáticas. Bachillerato 2*. Madrid: Anaya.

Espinoza, L., Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de “límite de función”: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 355–368.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39, 127–135.

Godino J. D., Wilhelmi M. R., Bencomo D. (2005). Suitability criteria for a mathematical instruction. A teaching experience with the function notion. *Mediterranean journal for research in mathematics education*, 4(2), 1–26.

Gras R., Suzuki, E., Guillet, F., Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical Implicative Analysis. Theory and applications.* Berlin: Springer-Verlag.

Gras R., Régnier J.-C., Guillet F. (Eds) (2009) *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d’analyse de données pour la recherche de causalités.* RNTI-E-16 Toulouse Cépaduès Editions

Hill, H. C., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430–511.

Janvier C. (1993). Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques, « Les représentations graphiques dans l’enseignement et la formation ». *Les*

Sciences de l’Éducation pour l’ère nouvelle, 1-3. (pp. 17–37) Caen : CERSE, Université de Caen.

Larson, R. E. (1989). *Cálculo y geometría analítica*. Madrid: McGraw-Hill.

Lecoutre J.-P., Tassi Ph (1987) *Statistique non paramétrique et robustesse*. Paris : Economica

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO. *BOE* 5, de 5 enero, 677–773.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE* 266, de 6 noviembre, 45381– 45477.

Régnier J.-C., Gras R. (2005). Statistique de rangs et analyse statistique implicative. *Revue Statistique Appliquée*, LIII (1), 5–38.

Santos, D. (1988). *Matemáticas COU. Opciones C y D*. Madrid: Santillana.

Shell Centre (1983). *South Notts Project*: *Functions and Graphs*. Nottingham: Autor.

Siegel, S. (1990). *Estadística no paramétrica. Aplicada a las ciencias de la conducta*. México DF: Trillas.

Spivak, M. (1975). *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

Wilhelmi M. R., Godino J. D., Lacasta E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *RDM* 27, 1, 77–120.

Annexe : questionnaire

Vous trouverez ci-dessous quatre manières de présenter la limite d'une fonction en un point extraites de différents livres. Analysez-les et répondez à la question finale (sur le verso de cette feuille).

Présentation A (Spivak, 1975, 110)[5]

DEFINITION

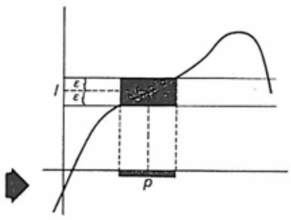
La fonction f **tend vers la limite** l **en** a signifie : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que, pour quel que soit x, si $0 < |x-a| < \delta$, alors $|f(x)-l| < \varepsilon$

Présentation B (De Guzmán, 1987, 143)

$$\boxed{\lim_{x\to p} f(x) = l}$$

$f(x) \to l$ quand $x \to p$ $\Leftrightarrow$ $|f(x)-l|$ est plus petit qu'un nombre préfixé ε, pour tous les valeurs de *x* suffisamment proches de *p*.

C'est-à-dire, le graphique de la fonction restera dans une bande étroite autour de *y* = *l* dans un intervalle autour de *p*.



Présentation C (Santos, 1988, 96)

Le concept de la « limite d'une fonction f quand x tend vers a » est en rapport à la question « quand la variable indépendante est assez proche de *a*, les valeurs de *f*(*x*), vers quelle valeur tendent-ils ? » Par exemple, pour la suivante table de valeurs d'une fonction

x	$f(x) = \dfrac{x^3-4x}{x-2}$
2,1	8,61
2,01	8,0601
2,001	8,006001
…	…
1,9	7,4
1,99	7,9401
1,999	7,994001
…	…

On en déduit que, au fur et à mesure que les valeurs de la variable *x* sont plus proches de 2 (soit par valeurs plus grandes que 2, soit par valeurs plus petites que 2), la variable dépendante *f*(*x*) est rendu aussi proche que l'on veut de 8. On écrit :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x}{x-2} = 8$$

Il faut bien observer que cette fonction n'existe même pas en *x* = 2. C'est-à-dire, la limite peut exister en une valeur *x* = *a*, même si *a* n'appartient pas au domaine de la fonction. Les méthodes pour calculer des limites d'une fonction en un point ont été déjà étudiées. Pour bien faire cela, il pourrait être suffisant, comme règle pratique, que l'on fasse la simple observation du comportement d'une fonction selon une table de valeurs, comme on a fait précédemment.

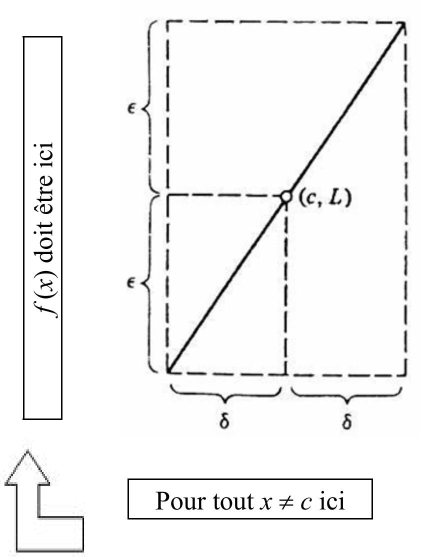
[5] Le questionnaire donné aux professeurs n'inclut aucune référence bibliographique.

Présentation D (Larson, 1989, 73–74)

Une définition rigoureuse de la limite

Jetons un coup d'œil sur notre description informelle des limites. Si *f*(*x*) est rendu aussi proche que l'on veut de *L* quand *x* tend vers *c* par la gauche et par la droite, on dit que la **limite** de *f*(*x*), quand *x* tend vers *c*, est *L* et on symbolise :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

À première vue, une telle description paraît très technique, pourquoi donc est-elle nommée « informelle » ? On trouve la réponse à cette question dans la signification des deux énonciations :

« *f*(*x*) est rendu aussi proche que l'on veut de *L* »

et

« *x* tend vers *c* »

La première personne qui a donné une signification rigoureuse à ces énonciations a été Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Sa définition ε-δ de la limite est aujourd'hui encore en usage.

Sur la figure ci-contre, ε représente un (petit) nombre positif. Alors, l'énonciation « *f*(*x*) est rendu aussi proche que l'on veut de *L* » signifie que *f*(*x*) est dans l'intervalle (*L*–ε, *L*+ε). En termes de valeur absolue, on écrit ceci ainsi :

$$|\, f(x) - L \,| < \varepsilon$$

De façon analogue, l'énonciation « *x* tend vers *c* » signifie qu'il existe un nombre δ > 0 tel que *x* est dans l'intervalle (*c* – δ, *c*) ou dans le intervalle (*c*, *c* + δ). En termes de valeur absolue, ceci signifie :

$$0 < |\, x - c \,| < \delta$$

Si on joint ces deux inégalités, on obtient la suivante rigoureuse définition de limite.

DÉFINITION DE LIMITE

L'énonciation

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

signifie que pour tout ε > 0 il existe un δ > 0 tel que :

$$0 < |\, f(x) - L \,| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |\, x - c \,| < \delta$$

Rangez les quatre présentations de la limite finie d'une fonction en un point, selon leur intérêt didactique ou leur facilité d'explication et de compréhension au lycée (1ère pour la plus intéressante, etc.) :

1ère : ___, car : _____________

2ème : ___, car : _____________

3ème : ___, car : _____________

4ème : ___, car : _____________