Didattica della Matematica
2000/2001- Geometria

1. Il paradigma Matematico sino all'800: il paradigma Euclideo.

- **La Geometria Euclidea come prima rappresentazione del mondo fisico: questo è anche il messaggio recuperato da Platone.**
- **La Geometria Euclidea come modello della Logica bivalente e quindi modello di riferimento dell’argomentare nella cultura occidentale: il messaggio Aristotelico.**
- **La Geometria come sistema ipotetico-deduttivo. Messaggio recepito a partite dalla fine dell’800. Hilbert lo riprende per rifondare la Geometria Euclidea. I Bourbakisti ne hanno fatto un programma per la classificazione delle Matematiche negli anni ‘30. Corrisponde a quello che oggi la comunità matematica definisce come Modelli Sintattici e Modelli Semantici[1].**

- Nei programmi S.E. : "L'itinerario geometrico elementare … si svilupperà attraverso la progressiva rappresentazione schematica della realtà fisica". Ma anche i programmi di S.M : uno dei temi portanti. Quale il messaggio?

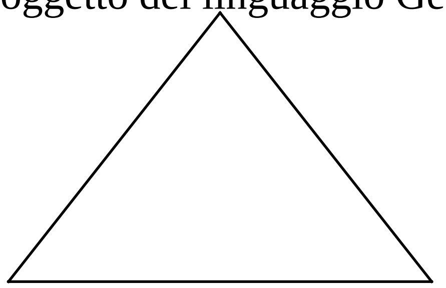
L’insegnamento della geometria tradizionale ignora il rapporto tra disegno e oggetto geometrico.

La figura geometrica è un oggetto geometrico descritto dal testo che la definisce: “Dati tre punti non allineati A, B, C, si dice *triangolo* ABC l’insieme dei punti comuni ai tre angoli convessi ABC, BCA, CAB”.

Il disegno è una rappresentazione della figura geometrica.

Per interpretare meglio questa situazione ci riferiremo al triangolo di Frege (Referente, Significato, Significante):

Referente teorico della figura geometrica “triangolo”
(il “triangolo” è un oggetto del linguaggio Geometria Euclidea)



Disegni del “triangolo”: uno dei possibili **significanti** del referente teorico

Significato della figura geometrica “triangolo”: rapporto tra *un* disegno e il suo referente teorico

[1] M. Luisa Dalla Chiara Scabia, *Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari*, Feltrinelli, 1968, Milano.

Una *Figura* sarà quindi determinata dalla coppia (Referente teorico, uno dei possibili disegni).

- **Un disegno geometrico non viene interpretato necessariamente come rinviante ad un oggetto geometrico e questo per le ragioni espresse precedentemente;**
- **I soggetti apprendenti d'altro canto possiedono delle conoscenze che permettono di interpretare un disegno in diverse maniere.**

a **b**

Fig. 4

Un matematico riconoscerà nel disegno <u>a</u> un cerchio e nel disegno <u>b</u> esiterà tra cerchio ed ellisse. Le ricerche riguardanti l'ambiguità delle rappresentazioni attraverso il disegno delle figure geometriche risultano abbastanza numerose e tutte convergono alla conclusione che gli allievi costruiscono delle immagini mentali del disegno rappresentato manipolandolo con "modelli interni" e che queste immagini mentali (figural concept) risultano abbastanza distanti dall'oggetto matematico che si vuole rappresentare.

Ma la geometria come prima rappresentazione del mondo fisico ha anche avuto collegamenti di altro tipo: la sezione aurea, la successione di Fibonacci e la botanica, ecc…

3. Costruzione di un modello ipoettico-deduttivo: l'esempio degli assiomi di Peano (corso di didattica della matematica 1)

2. L'assiomatica di Hilbert.

Concetti primitivi: punti, rette, piani.
Relazioni primitive: giacere, fra, congruente.

ASSIOMI di COLLEGAMENTO

C_1: Per due punti **A** e **B** c'è sempre una retta **a** che appartiene ad ognuno dei punti **A, B**.
C_2: Per due punti **A**, **B** c'è al massimo una retta che appartiene ad ognuno dei due punti **A** e **B.**
(punti, piani…distinti.)

C_3: Su una retta ci sono sempre almeno due punti. Ci sono almeno tre punti che non giacciono su una retta.

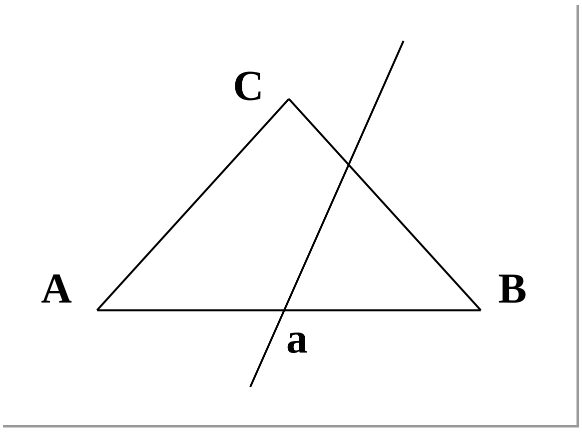
C_4: Per tre punti qualsiasi **A, B, C,** che non giacciono su una stessa retta, c'è sempre un piano α che appartiene ad ognuno dei tre punti **A, B, C**. Per ogni piano c'è sempre un punto che gli appartiene.

C_5: Per tre punti qualsiasi **A, B, C** che non giacciono su una medesima retta, c'è al massimo un piano che appartiene a ciascuno dei tre punti **A, B, C.**
C_6: Se due punti **A, B** di una retta **a** giacciono su di un piano α, allora ogni punto di **a** è nel piano di α**.**
C_7: Se due piani α e β hanno in comune un punto **A**, allora hanno in comune almeno un altro punto **B.**
C_8: Ci sono almeno quattro punti che non stanno in un piano.

(C_1-C_3 Assiomi piani, C_4-C_8 Assiomi spaziali)

Teorema: Due rette in un piano hanno un punto in comune o non ne hanno nessuno

ASSIOMI dell'ORDINE
O_1: Se un punto **B** giace fra un punto **A** e un punto **C,** allora **A, B, C** sono tre punti distinti di una retta e **B** giace pure fra **C** ed **A.**
O_2: Per ogni due punti **A** e **C**, c'è sempre almeno un punto **B**, sulla retta **AC**, tale che **C** giace fra **A** e **B.**
O_3: Di tre punti qualsiasi di una retta ce n'è al massimo uno che giace fra gli altri due.
O_4: Siano **A, B, C** tre punti non allineati ed una retta del piano **ABC** che non passi per alcuno dei punti **A, B, C**: allora, se la retta **a** passa per un punto del segmento **AB**, essa passa certamente anche per un punto del segmento **AC** ovvero per un punto del segmento **BC**.



(Se una retta entra all'interno di un triangolo, essa deve poi uscire).

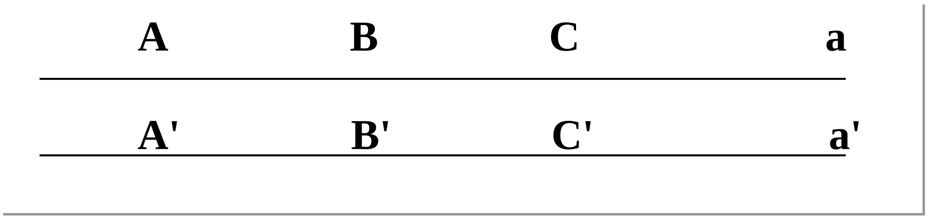
Teorema: Per ogni due punti A e C c'è sempre almeno un punto D sulla retta AC che giace fra A e C.

Teorema: In una retta ci sono infiniti punti.

ASSIOMI di CONGRUENZA
G_1: Se **A, B** sono due punti di una retta **a** ed inoltre **A'** è un punto sulla stessa retta ovvero su un'altra retta **a'**, si può sempre trovare un punto **B'**, da una data parte della retta **a'** rispetto ad **A'**, tale che il segmento **AB** sia congruente, ovvero uguale, al segmento **A'B'**; in simboli: **AB≡A'B'**.
(Possibilità del trasporto dei segmenti.)
G_2: Se un segmento **A'B'** ed un segmento **A''B''** sono congruenti ad uno stesso segmento **AB**, allora anche il segmento **A'B'** è congruente al segmento **A''B''**; ovvero, brevemente: se due segmenti sono congruenti ad un terzo, essi sono congruenti fra loro.

(Ogni segmento è congruente a se stesso)

G_3: Siano **AB** e **BC** due segmenti senza punti in comune su una retta **a** ed **A'B'** e **B'C'** due segmenti sulla stessa retta o su un'altra retta **a'**, sempre senza punti in comune; allora, se è **AB≡A'B'** e **BC≡B'C'**



(Addizzionabilità dei segmenti.)

G_4: Siano dati un angolo ∠ **(b, k)** in un piano α ed una retta **a'** in un piano α**'**, come pure un determinato lato di **a'** in α**'**. Si indichi con **b'** una semiretta della retta **a'**, che abbia origine nel punto **O'**: c'è allora nel piano α**'** una ed una sola semiretta **k'**, tale che l'angolo∠ **(b, k)** è congruente, ovvero uguale, all'angolo ∠ **(b', k')** ed allo stesso tempo tutti i punti interni all'angolo ∠ **(b', k')** stanno dalla data parte di **a'**; in simboli:

$$\angle\, (b, k) \equiv \angle\, (b', k').$$

Ogni angolo è congruente a se stesso, cioè si ha sempre:

$$\angle\, (b, k) \equiv \angle\, (b, k).$$

(Ogni angolo può venire trasportato…)

G_5: Se per due triangoli **ABC** ed **A'B'C'** valgono le congruenze
AB≡A'B', AC≡A'C', ∠BAC≡∠B'A'C',
allora è sempre valida anche la congruenza ∠**ABC≡**∠**A'B'C'.**

(G_1- G_3 congruenze segmenti, assiomi lineari, G_3- G_4 assiomi della geometria piana)
Conseguenze: criteri di congruenza dei triangoli.

ASSIOMA delle PARALLELE (o di Euclide)

P_1: Siano **a** una qualsiasi retta ed **A** un punto fuori di **a**: allora c'è, nel piano definito da **A** e da **a**, al massimo una retta che passa per **A** e che non interseca la **a**.

Teorema: Gli angoli di un triangolo hanno per somma due angoli retti.

ASSIOMI di CONTINUITA'

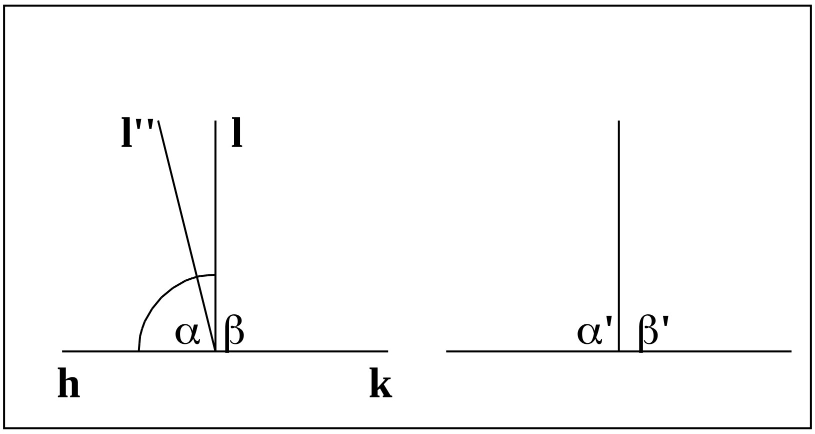
M_1 : (Assioma della misura ovvero assioma Archimedeo). - Se **AB** e **CD** sono due segmenti qualsiasi, c'è un numero **n** tale che il trasposto del segmento **CD** reiterato **n** volte da **A** sulla semiretta passante per **B**, porta al di là del punto **B.**

M_2: (Assioma di completezza lineare).- Il sistema dei punti di una retta con le sue relazioni di ordinamento e congruenza non è suscettibile di un ampliamento per il quale rimangono inalterate le relazioni sussistenti tra gli elementi precedenti come pure le proprietà fondamentali di ordinamento lineare e congruenza che seguono dagli assiomi O_3 ed anche M_1.

(Un assioma di completezza che conservi tutti gli assiomi, ma non quello di Archimede, porterebbe ad una contraddizione.)
(testo Speranza pag. 198-202: alcuni esempi sull'utilità dei singoli assiomi).

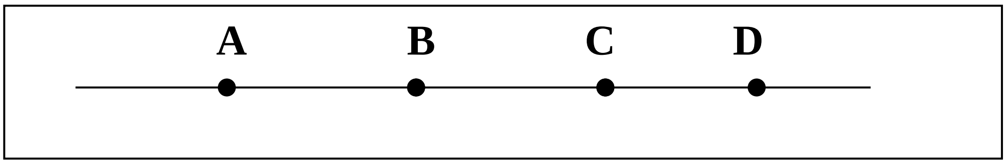
La geometria o le geometrie: il messaggio del sistema ipotetico-deduttivo.

2. La geometria come scienza dell'argomentare: la dimostrazione per assurdo.
Teorema: Tutti gli angoli retti sono congruenti fra di loro.
(Dimostrazione per assurdo: riprendere lo schema della dimostrazione per la geometria come scienza dell'argomentare)



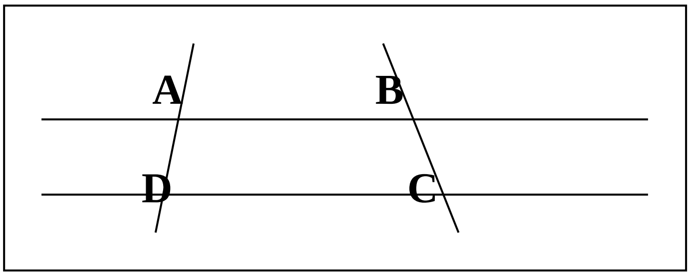
2.1 Esericitazione 1: I modelli della Geometria

Modello M_1: Per piano si intende l'insieme di punti {A, B, C, D} e per (unica) retta di questo piano si intenda ancora l'insieme {A, B, C, D}. In questo modello il primo assioma del primo gruppo è verificato?
E gli altri assiomi?

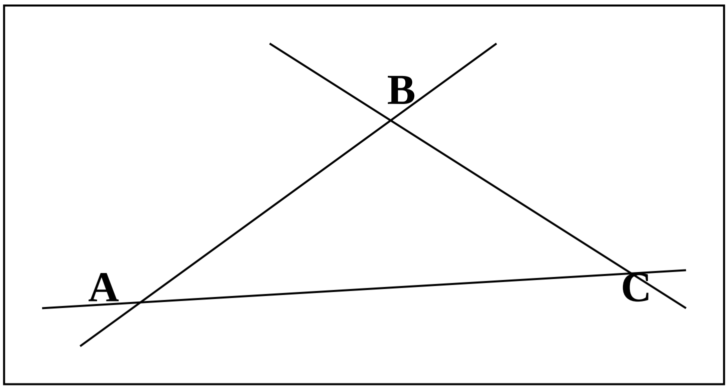


Osservazione: La rappresentazione della retta
Non va pensata come qualcosa di continuo, ma come l'insieme dei punti, ed essi soli, su di essa esplicitamente segnati.

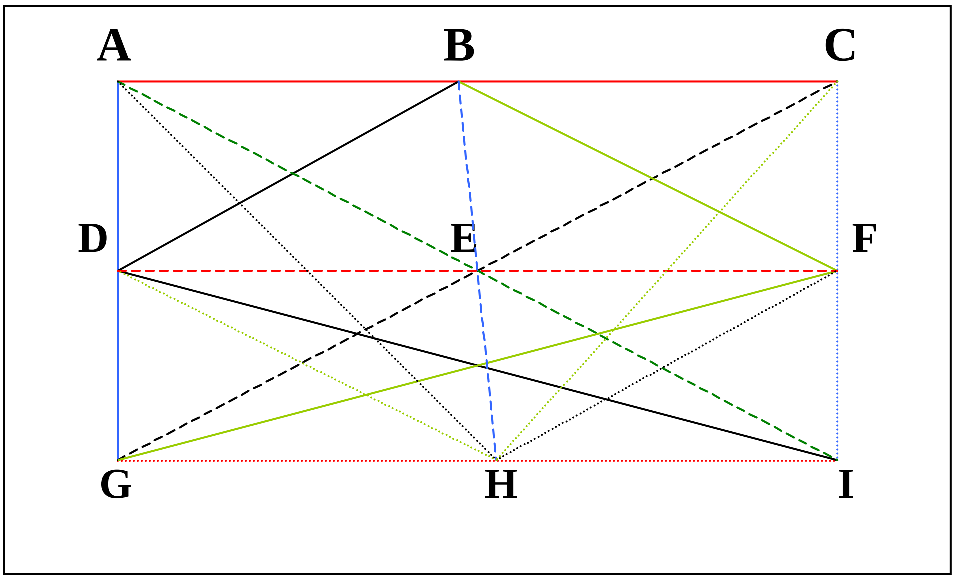
Modello M_2: Sia {A, B, C, D}il piano; siano {A, B}, {C, D}, {B, C}, {A, D} le rette:
{A, B}∩ {C, D}=∅;
{B, C}∩ {A, D}=∅;
{A, B}∩ {A, D}=A, ecc..



Modello M_3: Sia {A, B, C} il piano e siano {A, B}, {A, C}, {B, C} le rette. Si hanno tre punti e tre rette: due punti individuano una ed una sola retta; per ogni retta esiste un punto (qui, uno solo) che non le appartiene.



Modello di Young:
Sia {A, B, C, D, E, F, G, H, I} il piano, e siano {A, B, C}, {D, E, F}, {G, H, I}, {A, D, G}, {B, E, H}, {C, F, I}, {A, E, I}, {B, F, G}, {C, D, H}, {C, E, G}, {B, D, I}, {A, F, H} le rette.

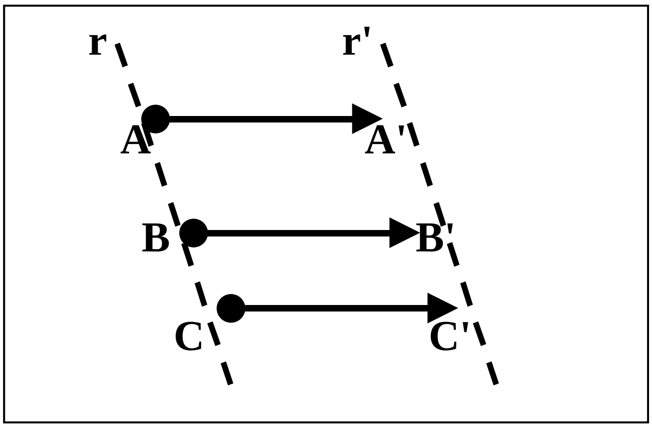


3. Geometria delle Trasformazioni

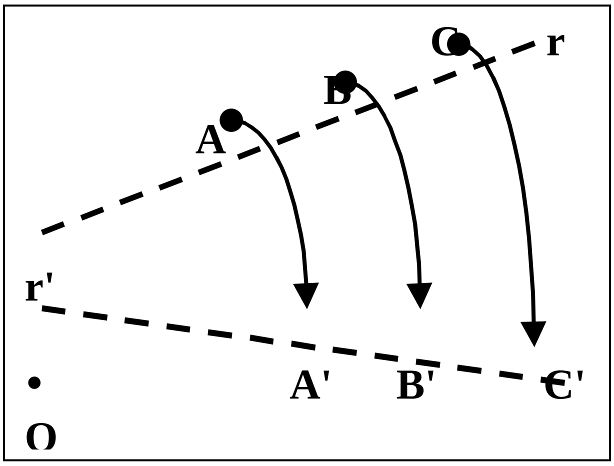
- **L'idea di invariante rispetto ad una relazione.**
- **Le Corrispondenze biunivoche.**
- **Le Trasformazioni come ricerca di invarianti.**
- **Le Trasformazioni Topologiche, proiettive, affini. (Cenni pag. 172-177)**
- **Le Trasformazioni che conservano la "misura": traslazioni, rotazioni, simmetrie**

1. **Una traslazione trasforma punti allineati in punti allineati. (Conserva l'allineamento dei punti). Le traslazioni conservano le lunghezze.**
   - **"Si dice traslazione una corrispondenza (nel piano) nella quale i segmenti che congiungono punti corrispondenti hanno tutti la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso."**
   - **"Le rette che congiungono i punti A e A', B e B', C e C' hanno tutte la stessa dierzione."**

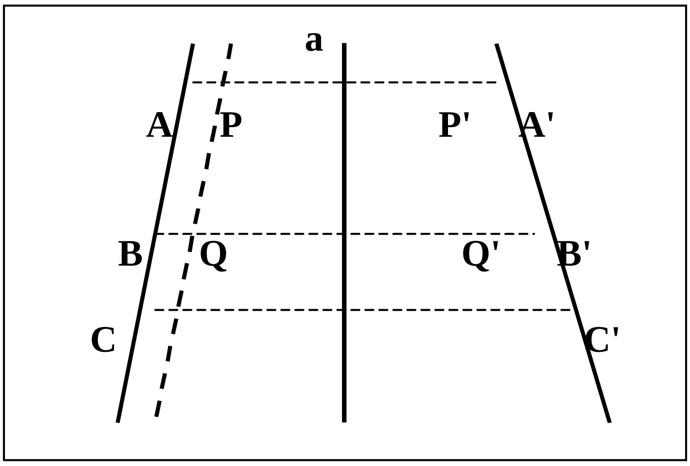
- **Si dice traslazione una corrispondenza biunivoca nella quale le rette che congiungono i punti corrispondenti hanno la stessa direzione, e a una retta corrisponde una retta di uguale direzione.**



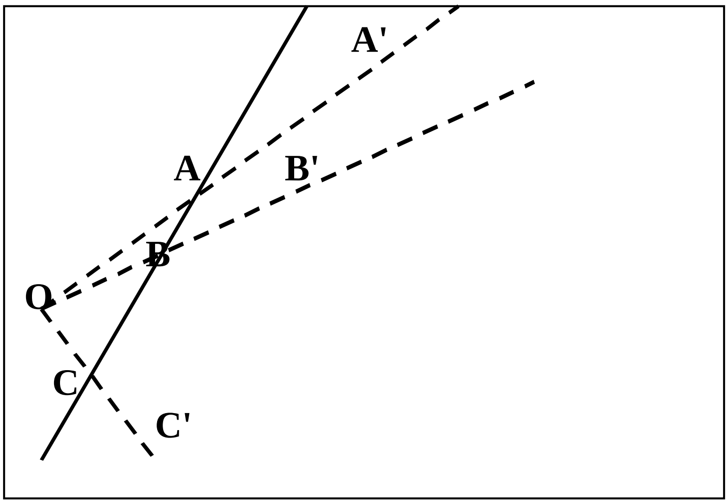
2. **La rotazione trasforma punti allineati in punti allineati. Non conserva la direzione. Conserva le distanze? Trasforma una retta in una retta? Fa corrispondere rette perpendicolari in rette perpendicolari?**



3. **La simmetria assiale trasforma punti allineati in punti allineati.**
   - **La simmetria rispetto alla retta a è la corrispondenza biunivoca nella quale le rette che congiungono i punti corrispondenti sono perpendicolari all'asse, e questo divide a metà il segmento che li unisce.**



4. L'omotetia trasforma punti allineati in punti allineati. Rette corrispondenti hanno la stessa direzione. Le distanze non sono conservate. Sono in proporzione?



- Le simmetrie, le traslazioni e le rotazioni hanno tutte questa proprietà: la distanza di due punti è uguale a quella dei punti corrispondenti (si dice che esse conservano le distanze). Le omotetie non hanno invece questa proprietà. Le corrispondenze biunivoche che conservano la distanza si chiamano "isometrie".
- Le omotetie non conservano le distanze, ma le modificano in un modo ben preciso: il segmento trasformato dalla omotetia è moltiplicato per un numero.
- Le trasformazioni nelle quali ogni distanza viene moltiplicata per un numero fisso si chiama similitudine. (Le similitudini sono delle corrispondenze biunivoche nelle quali il rapporto fra le lunghezze di segmenti corrispondenti è costante.)
- Le omotetie sono esempi di similitudini; le isometrie sono particolari similitudini (rapporto 1).

Due definizioni a confronto di "Rette parallele":

  - La retta r é parallela alla retta s quando la distanza di ogni punto di r da s è la stessa.
  - Una retta si dice parallela a un'altra quando sono complanari e non s'incontrano.

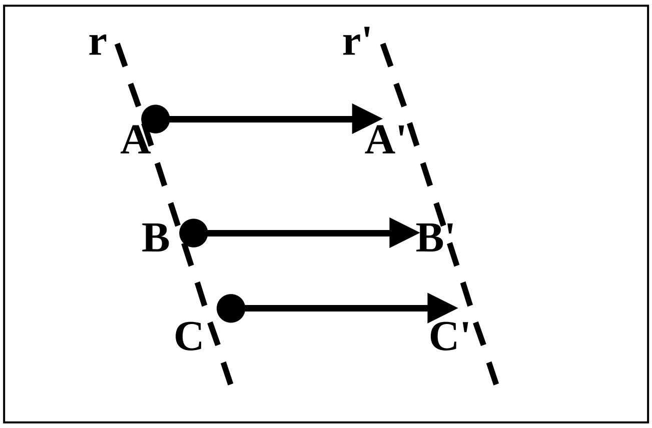
Componimenti di trasformazioni.

4. Geometria delle Trasformazioni

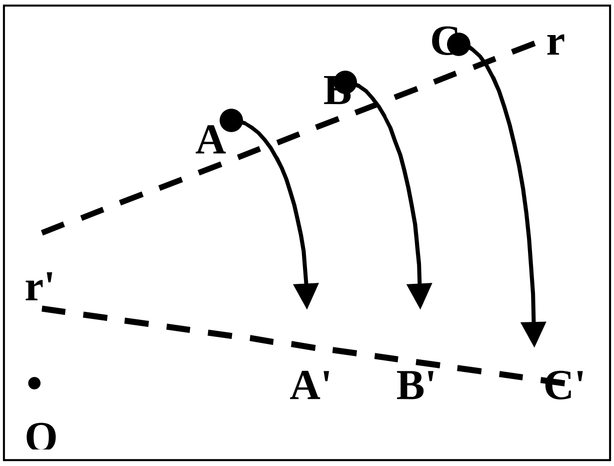
- L'idea di invariante rispetto ad una relazione.
- Le Corrispondenze biunivoche.
- Le Trasformazioni come ricerca di invarianti.
- Le Trasformazioni Topologiche, proiettive, affini. (Cenni pag. 172-177)
- Le Trasformazioni che conservano la "misura": traslazioni, rotazioni, simmetrie

5. Una traslazione trasforma punti allineati in punti allineati. (Conserva l'allineamento dei punti). Le traslazioni conservano le lunghezze.

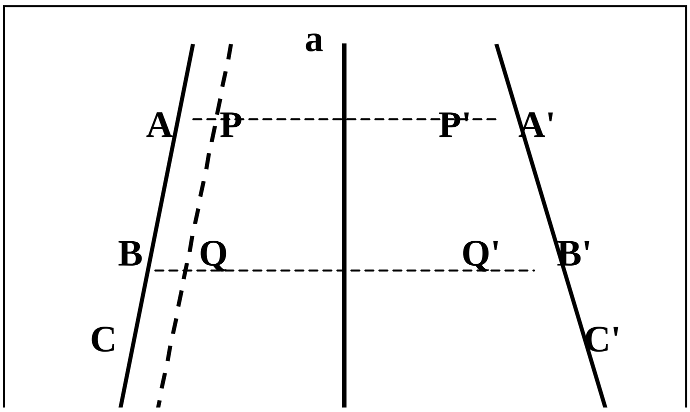
- "Si dice traslazione una corrispondenza (nel piano) nella quale i segmenti che congiungono punti corrispondenti hanno tutti la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso."
- "Le rette che congiungono i punti A e A', B e B', C e C' hanno tutte la stessa dierzione."
- Si dice traslazione una corrispondenza biunivoca nella quale le rette che congiungono i punti corrispondenti hanno la stessa direzione, e a una retta corrisponde una retta di uguale direzione.



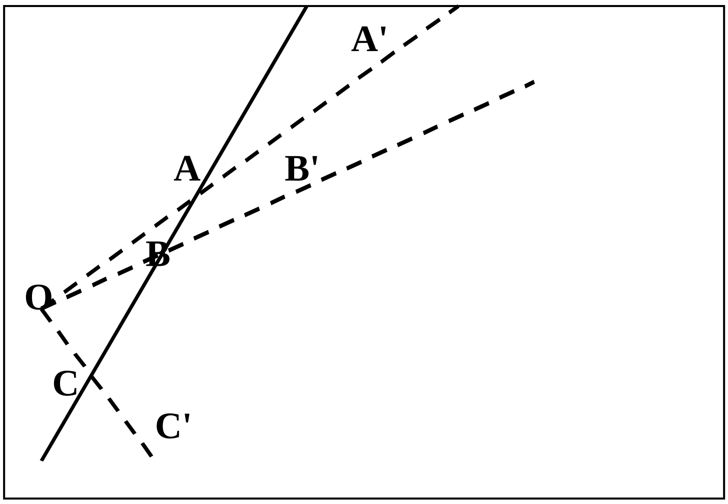
6. La rotazione trasforma punti allineati in punti allineati. Non conserva la direzione. Conserva le distanze? Trasforma una retta in una retta? Fa corrispondere rette perpendicolari in rette perpendicolari?



7. La simmetria assiale trasforma punti allineati in punti allineati.
   - La simmetria rispetto alla retta a è la corrispondenza biunivoca nella quale le rette che congiungono i punti corrispondenti sono perpendicolari all'asse, e questo divide a metà il segmento che li unisce.



8. **L'omotetia trasforma punti allineati in punti allineati. Rette corrispondenti hanno la stessa direzione. Le distanze non sono conservate. Sono in proporzione?**



- **Le simmetrie, le traslazioni e le rotazioni hanno tutte questa proprietà: la distanza di due punti è uguale a quella dei punti corrispondenti (si dice che esse conservano le distanze). Le omotetie non hanno invece questa proprietà. Le corrispondenze biunivoche che conservano la distanza si chiamano "isometrie".**
- **Le omotetie non conservano le distanze, ma le modificano in un modo ben preciso: il segmento trasformato dalla omotetia è moltiplicato per un numero.**
- **Le trasformazioni nelle quali ogni distanza viene moltiplicata per un numero fisso si chiama similitudine. (Le similitudini sono delle corrispondenze biunivoche nelle quali il rapporto fra le lunghezze di segmenti corrispondenti è costante.)**
- **Le omotetie sono esempi di similitudini; le isometrie sono particolari similitudini (rapporto 1).**

Due definizioni a confronto di
"Rette parallele":

  - **La retta r é parallela alla retta s quando la distanza di ogni punto di r da s è la stessa.**
  - **Una retta si dice parallela a un'altra quando sono complanari e non s'incontrano.**

Componimenti di trasformazioni.

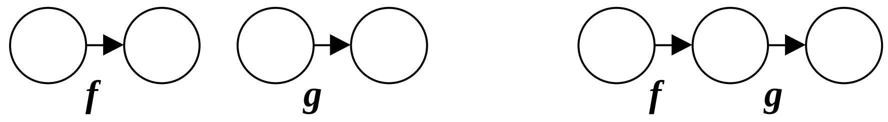
Affinità: ombre
Proiettività: prospettiva
Topologia: geometria della gomma, trasformazioni bicontinue.

Enriques:
- **Sensazioni tattili-muscolari: origine della topologia;**
- **Sensazioni visive: origine della proiettiva;**
- **"Tatto speciale" della mano (o altra parte del corpo) che funziona come strumento di confronto: Geometria metrica Euclidea.**

Giustificazione fisiologica degli Elementi di Euclide da parte di Enriques.

Costruttivista: Gli oggetti della geometria (in generale gli oggetti scientifici) si inventano: sono il prodotto di specifiche pratiche storiche, il frutto di circostanze e contraddizioni tra gruppi sociali, contraddizioni da cui emerge la natura di quello che, apparentemente, scopriamo.

Sull'insieme delle trasformazioni geometriche possiamo definire delle operazioni (composizioni di … detta anche prodotto)



il prodotto f•g non è definito **il prodotto f•g è definito**

Affinché nun insieme J di corrispondenze biunivoche in A sia un gruppo è necessario e sufficiente che siano verificate le condizioni seguenti:
- **sia chiuso rispetto al prodotto;**
- **in J vi sia l'identità;**
- **per ogni elemento di J, vi sia in J anche la biiezione inversa.**

- **L'insieme delle isometrie d'un piano in sé è un gruppo.**
- **Le similitudini d'un piano in sé formano gruppo.**
- **L'insieme delle traslazioni è un gruppo.**
- **Le omotetie con centro in un dato punto formano un gruppo.**

5. La geometria dei frattali

La geometria Euclidea è in grado di descrivere l'andamento delle nuvole, l'andamento delle coste, in generale gli oggetti della natura?

Alla fine del XIX i matematici avevano già posto il problema con curve come quella di Peano o l'insieme di Cantor o le funzioni di Weierstrass.

Inserire curva di Peano CON FOTO

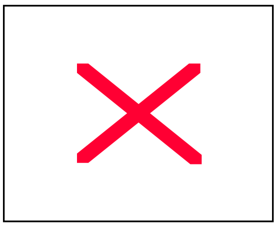
Caratteristiche matematiche della geometria frattale:
- **Dimensione non intera;**
- **Autosimilarità della struttura.**

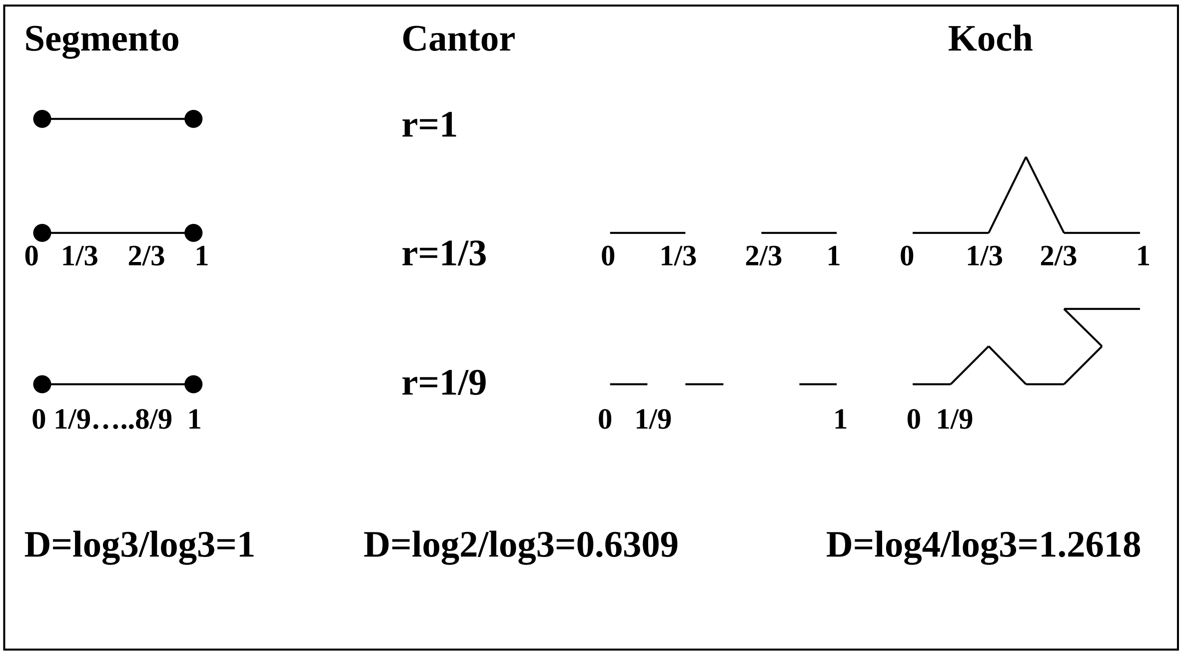
Cosa è la "Dimensione" in geometria?
(Esempio di Flatlandia per le dimensioni intere)

Dimensione frattale.
Sia dato un segmento di lunghezza unitaria e dividiamolo in tre parti. Si asporti quindi la parte centrale e si ripeta l'operazione nei tratti restanti ricorsivamente. Avremo così l'insieme

di Cantor. Se si rimpiazza la parte centrale con altri due lati di un triangolo euilatero, ricorsivamente si avrà la curva di Koch.

La misura della dimensione:
Se si ricopre ciascuno di questi oggetti con N sfere di raggio r, dove r è tale da assicurare che non si perda risoluzione ad ogni passo della partizione. All'aumentare del nmero delle partizioni, la dimensione frattale D è definita:





Autosimilarità.

Un'applicazione
_: $IR^n \rightarrow IR^n$ è una contrazione

se $\forall$ x,y $\in$ IR^n, $|$_ (x)- _ (y)$| \leq$ C$|$x-y$|$, $0 \leq C \leq 1$

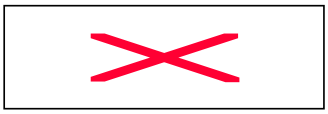
Ogni contrazione è continua.

Ogni contrazione che trasforma un sottoinsieme di IR^n in figure simili è detta similitudine.

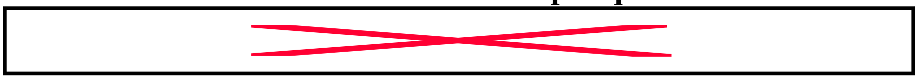
Naturalmente la figura simile può poi essere isometricamente trasformata (traslazioni, rotazioni, simmetrie).

L'autosimilarità fa si che le immagini dell'insieme di partenza per via delle contrazioni successive non si sovrappongono rimangano nitide, disgiunte, avendo in comune, al più insiemi di misura nulla.

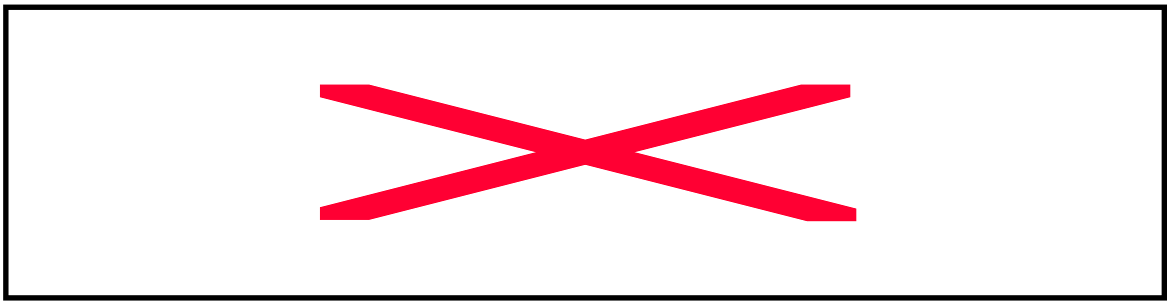
Cioè un insieme $E \subset IR^n$ è un'invariante per un insieme di contrazioni $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se

Le contrazioni sono anche similitudini se per qualche s si ha che



Hansdorff aveva considerato una misura che tiene conto delle contrazioni.



$Se \bigcup_i U_i \quad E, \quad e \quad 0 < |U_i| \le S, \quad i$

diciamo che $\{U_i\}$ é una δ-copertura di E.

Sia $E \subset IR^n$ e $s > 0$. Per $\delta > 0$ $\chi_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$

dove il minimo é definito su tutti i numerabili

$\{U_i\}$ di E. $\chi_\delta^s(E)$ é una misura esterna.

La misura di Hansdorff é cosi definita:

$$\chi^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \chi_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \chi_\delta^s(E).$$

$\chi_\delta^s(E)$ decresce al crescere di δ

Proiezione del film sui frattali di "le scienze".

6. Grandezze

Il problema delle "Grandezze" è quello più generale applicabile poi alle discipline più disparate che richiedono anche un approccio "quantitativo".

Possiamo parlare di "Grandezze Omogenee" quando possiamo fare le operazioni di sommare e confrontare. Questo è sufficiente per discipline come la fisica.
Una teoria organicamente più forte.

Sia **G** l'insieme universo di tutte le grandezze e sia assegnata la moltiplicazione.
(un particolare insieme di grandezze adimensionali sono i "numeri puri" $\mathbf{R}^+$)

G_1. L'insieme **G** delle grandezze è un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione;
G_2. Il gruppo moltiplicativo $\mathbf{R}^+$ è un sottogruppo di **G.**

Abeliano: commutativo;
Elemento neutro: 1 $\mathbf{R}^+$;
Il prodotto di una grandezza y per l'inverso di una grandezza x lo chiameremo rapporto fra le grandezze y e x: $y/x=y\cdot x^{-1}$.

Definizione: Le grandezze x, y **G** si dicono omogenee se il loro rapporto y/x è un numero reale (cioè se y/x è un elemento del sottogruppo
$\mathbf{R}^+$ di **G**. In tal caso il rapporto y/x si dice anche misura di y rispetto ad x (x assunta come unità).

La relazione di omogeneità è di equivalenza. Il gruppo quoziente $\mathbf{G}/\mathbf{R}^+$ è il gruppo della specie di grandezze.

$\mathbf{G} \to \mathbf{G}/\mathbf{R}^+$ (omomorfismo canonico) fa corrispondere ad ogni grandezza x di **G** la specie di x,
[x] $\mathbf{G}/\mathbf{R}^+$
Due grandezze sono della stessa specie se e solo se sono omogenee.

Sia A $\mathbf{G}/\mathbf{R}^+$ (una classe di grandezze omogenee)
$x<y$ quando x e y sono in A, cioè $y/x >1$.
Si stabilisce un ordinamento totale in A come in $\mathbf{R}^+$.

Definizione: Diremo somma delle grandezze x, y A la grandezza di A avente come misura la somma delle misure di x e di y, rispetto ad una à di grandezza u A assunta come unità di misura. $x+y = u(x/u +y/u)$.

Vale l'associativa e la commutativa e la condizione di monotonia:
$x+z<y+z$ se e solo se $x<y$, x,y,z A.

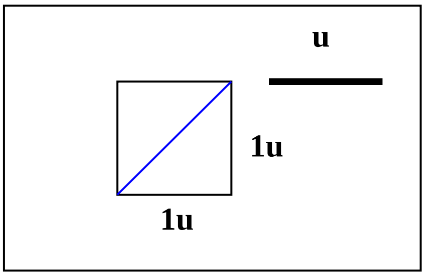
Per ogni u A isomorfismo continuo
$\phi: A \to \mathbf{R}^+$ associa ad u il numero reale 1.
Associa ad ogni grandezza x A la sua misura x/u $\mathbf{R}^+$. Ne segue che l'isomorfismo ϕ tra le specie A_1 e A_2 che ad u_1 A_2 è della forma:
$\phi(x)=kx$, dove $k=u_2/u_1$ è il coeffciente di proporzionalità.
Un isomorfismo tra due specie non è altro che la "proporzionalità diretta".

7. Misura

Approccio alle grandezze: con l'algebra. (gruppi, omomorfismi, isomorfismi tra insieme di Grandezze e R^+)

Il problema delle marche e i campi concettuali di Vergnaud.

Rapporto storico epistemologico tra "Grandezze" e "misura".
Commensurabilità e incommensurabilità.
Rapporto Razionale e Reale. Il problema di √2.



Piuttosto che definire il rapporto si cercava di metterlo in relazione ad un altro rapporto dello stesso tipo: 2 sta a 7 come 4 sta a 14.

Le Frazioni sono gli strumenti adeguati per esprimere i rapporti.
Euclide: geometricamente.
La nozione di rapporto in Q e in R.
(a/b è la stessa cosa di a:b da un punto di vista formale e di comportamenti da parte di allievi su di un problema dato?)

- a:b **rapporto** geometrico (operatore, scalare)

- Rapporti interni: grandezze omogenee;
- Rapporti esterni: grandezze di natura diversa;
- Diversi tipi di rapporti: numerici, rapporto come differenza numerica (cosa bisogna aggiungere ad A per ottenere B).

Proporzione.
Mettere in relazione due oggetti in una nalogia permette il trasporto di una struttura o una proprietà conosciuta dall'una verso l'altra. Essa permette di parlare con un linguaggio dell'altro e definire una tale struttura dai caratteri comuni di questi oggetti. Questa analogia è alla base della modellizzazione.

Una proporzione è definita come l'uguaglianza tra due rapporti.
La teoria delle proporzioni è formalizzata nel XVIII secolo dopo la formalizzazione dell'algebra.

Lunghezze e misure.
La lunghezza d'un segmento è l'insieme di tutti i segmenti congruenti ad esso.
Confronto di lunghezze. Portiamo il primo segmento sul secondo. Evidenziamo le parti congruenti. Quindi si può affermare quale dei due è più grande.

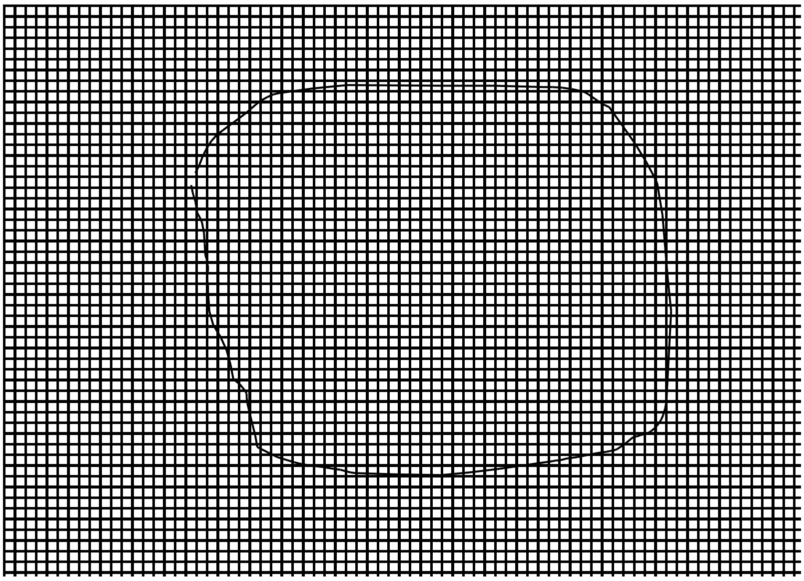
Cosa si è utilizzato: segmento (assioma della retta, assioma dell'ordine), congruenza, **trasporto di un segmento.**
Si definiscono quindi la somma, multipli e sottomultipli.

Si passa quindi alla misura vera e propria: Si fissi una unità di misura e si vede quante volte quell'unità di misura è contenuta nel segmento da misurare.

Misura degli angoli.

Il principio di Eudosso-Archimede.
- Continuità;
- Infinito e infinitesimo;
- Approssimazione.

Il problema della misura dell'area di una figura.



Poligono: Unione di un numero finito di poligoni convessi chiusi.

Si dice che un insieme J è ricoperto dagli insiemi $K_1, K_2, ,\dots, K_n$ quando J è l'unione di tali insiemi.
$\{ K_1, K_2, ,\dots, K_n \}$ si dice ricoprimento di J.
Diciamo che i poligoni P, Q sono **equiscomponibili** quando ciascuno di essi si può ricoprire con n poligoni (n N_0), a due staccati, in maniera che per ognuno dei poligoni che ricoprono P ce ne sia uno di quelli che ricoprono Q a esso congruente.

Nell'insieme dei poligoni del piano la relazione di equiscomponibilità è una relazione di equivalenza.

L'area del poligono P è la classe di equivalenza, cui appartiene P, della relazione di equiscomponibilità: **l'area di P è l'insieme dei poligoni equiscomponibili a P**.

La classe delle grandezze si dice continua quando essa verifica il postulato della continuità:

"Data una partizione di C in due classi non vuote C' e C'', tali che ogni elemento di C' sia minore di ogni elemento di C'', C' ammette massimo oppure C'' ammette minimo".

L'insieme delle aree (con l'operazione di addizione) è una classe di grandezze continua.

Si dice area ***A(F)*** delle figure non poligonali l'estremo superiore (quando esiste) delle aree dei poligoni contenuti in ***F***.

- **Eudosso-Archimede: Date due aree A e B, esiste un multiplo di A maggiore di B.**
- **Dati un'area A e un naturale n, esiste una ed una sola area B tale che nB=A: essa si dice l'ennesima parte di A.(1/n A)**
- **Date le aree A (#0) e B, esiste un ed un solo numero k $\in R^+$ tale che B=kA: esso si dice rapporto B:A o anche misura di B rispetto ad A, e si indicherà con M(A).**

Appendice 1

Il "Club delle Tratarughe"[2]

<u>Termini primitivi</u>: persona, insieme.

<u>Definizioni:</u> Il Club delle Tartarughe è un insieme di una o più persone. Una persona appartenente al Club è detta Tartaruga. I comitati sono insiemi di una o più Tartarughe. Una Tartaruga appartenente a un Comitato è detta membro di quel comitato. Due Comitati sono uguali se ogni membro del primo è anche membro del secondo, e se ogni membro del secondo è anche membro del primo. Due comitati che non hanno membri in comune sono detti disgiunti.

<u>Assiomi</u>

1. **Ogni Tartaruga è membro di almeno un Comitato;**
2. **Per ogni coppia di Tartarughe esiste uno ed uno solo Comitato di cui entrambe sono membri;**
3. **Per ogni Comitato esiste uno ed uno solo Comitato disgiunto.**

<u>Teorema:</u> Ogni Tartaruga è membro di almeno due comitati.

<u>Dimostrazione</u>

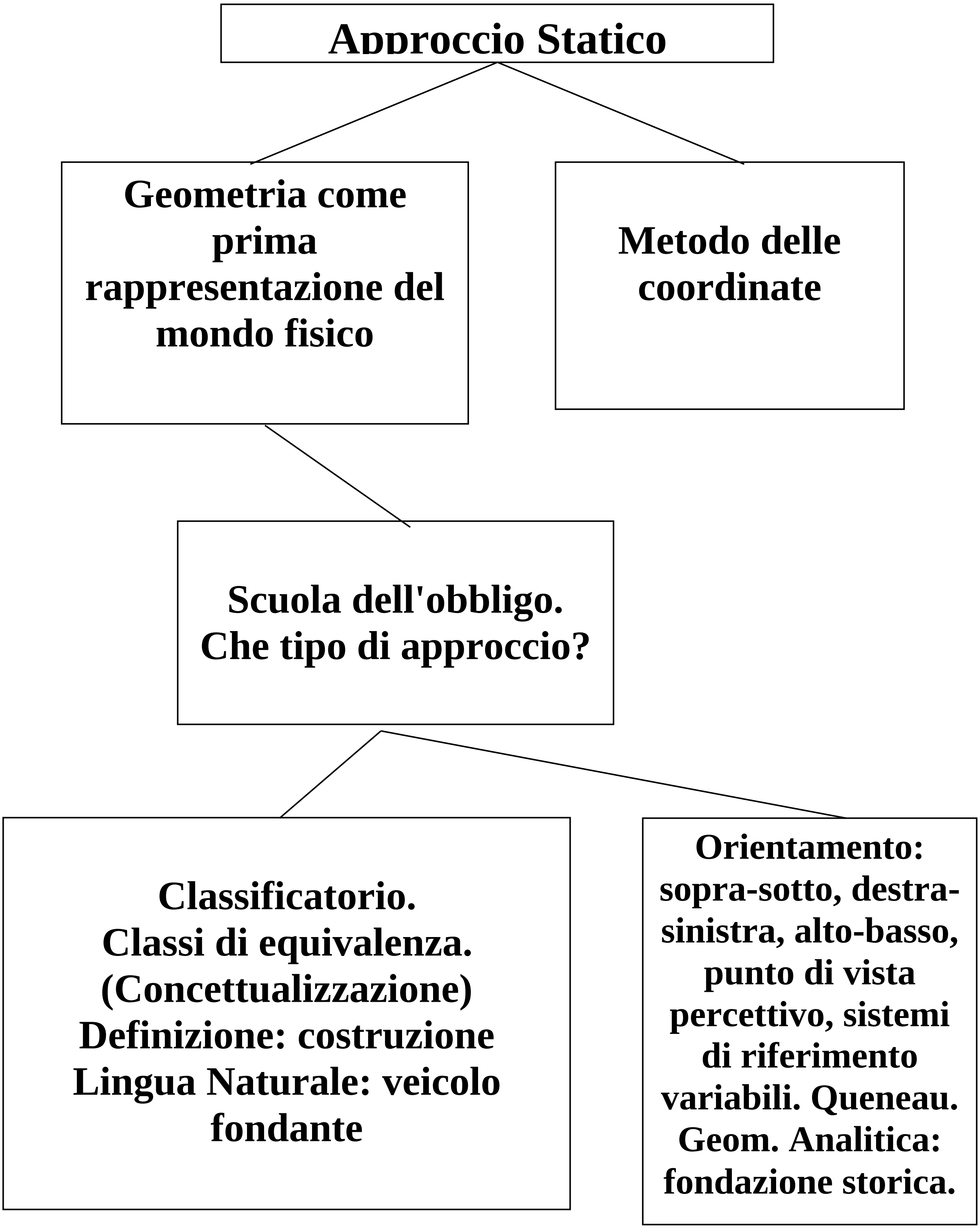
Enunciati	Motivazioni
1. Sia "t" una Tartaruga.	ipotesi, denominazione
2. t è membro di un Comitato "C".	Assioma 1, denominazione
3. Sia "D" il Comitato disgiunto da C.	Assioma 3, denominazione
4. Sia "u" un membro di D.	Definizione Di Comitato
5. u non è membro di C.	Definizione di "disgiunto"
6. Esiste un Comitato "E" cui $\in$ sia t che u.	Assioma 2, denominazione.
7. C ed E non sono uguali.	Definizione di "uguale"; 5, 6.
8. t è membro sia di C che di E.	2, 6.
9. t è membro di almeno due Comitati.	7, 8
10. Di conseguenza ogni Tartaruga è Membro di almeno due Comitati.	generalizzazione.

Teorema 2: Ogni Comitato ha almeno due membri.

[2] Richard Trudeau, La rivoluzione non euclidea, Boringhieri, 1991, pp.30-34.

Appendice 2

Una mappa concettuale degli approcci alle "Geometrie"



Approccio Dinamico

Geometria delle trasformazioni: isometrie, traslazioni, rotazioni, simmetrie.
Invarianti: topologiche, proiettive, affini. (pag. 175-177)

L'ordinatore e le figure in movimento.
Il cabri: primitive del linguaggio e Geometria Euclidea.

Le geometrie: base semantica molto ricca.

La dimensione in geometria: Flatlandia, introduzione ai frattali (video).

La misura:

L'argomentare. (Hilbert)

Il messaggio ipotetico-deduttivo. L'organizzazione dei "saperi", delle discipline nella cultura occidentale.	**Storia della "dimostrazione": Confronto tra cultura occidentale ed orientale.**

Appendice 3

Corso di Didattica della Matematica 2

Anno Accademico 2000/2001

1° Compito di Matematica

1. **Si consideri il seguente Modello:**

Sia {A, B, C, D} il piano; siano {A, B}, {A, C}, {A, D}, {B, C, D} le rette. Vi sono quindi quattro punti e quattro rette. Quali assiomi della Geometria di Hilbert soddisfa? Commentare brevemente.

2. **Si consideri il seguente Modello:**

Sia {A, B, C, D} il piano; siano {A, B}, {A, C}, {A, D}, {B, C}, {B, D}, {C, D} le rette. Quali assiomi della Geometria di Hilbert soddisfa? Commentare brevemente.

3. **In un Sistema di Riferimento Cartesiano Ortogonale Monometrico si considerino:**
   l'equazione della parabola $y=-4x^2$ e le equazioni di una traslazione.

$$x = -3X - 3$$

$$y = 4Y + 5$$

Trasformare l'equazione della parabola e rappresentare nel Sistema di Riferimento Cartesiano Ortogonale Monometrico.

4. **Si consideri la trasformazione geometrica:**

5. **Si consideri la trasformazione geometrica:**

6. **Esercizio sulla misura:**

Appendice 4

Schema di tesina per la valutazione della seconda parte del corso Didattica della Matematica Anno accademico 1999/2000

La tesina sarà costituita da 4 parti:

1. **Analisi comparativa di due o più testi di scuola elementare differenti per impostazione. Tale analisi dovrà essere fatta sia per il 1° ciclo che per il 2° ciclo. Si cercherà di mettere in evidenza il ruolo degli approcci alla geometria: Geometria come prima rappresentazione del mondo fisico, Geometria come scienza dell'argomentare (legami con le attività logiche), Geometria delle Trasformazioni, Il metodo delle Coordinate. Giustificare anche l'ordine di introduzione dei vari approcci.**
2. **Analisi a-priori di una situazione/problema riguardante la geometria del 1° ciclo o del 2° ciclo. Lo schema dell'analisi a-priori deve riguardare i tre momenti: analisi epistemologica, analisi storico-epistemologica, comportamenti attesi da parte degli allievi.**
3. **Sperimentazione della situazione/problema nell'ambito del lavoro del tirocinio. Analisi dei dati sperimentali (protocolli, analisi statistica, ecc…) (facoltativo).**
4. **Messa a punto di una situazione a-didattica riguardante la geometria. Definizione della situazione. Ruolo dell'insegnante. Descrizione delle consegne per gli allievi. Analisi delle fasi d'azione, di formulazione, di validazione.**

Sono attribuiti 5 punti per una completa dei primi due punti. Per il 4° punto è invece attribuito un punteggio di 4 punti. (Totale 14 punti)

Dimostrazione: Per definizione un angolo retto è adiacente ad un suo adiacente.

α **e** β **ed** α' **e** β' **siano angoli adiacenti**

$\alpha\equiv\beta$ **ed** $\alpha'\equiv\beta'$.

Supponiamo che α' **non sia congruente ad** α**.**

Allora il trasporto di α' su **h** dalla parte di **l**, da una semiretta **l''** distinta da **l**.

$$\angle(\mathbf{h}, \mathbf{l''}) < \alpha,\ \alpha\equiv\beta,\ \beta < \angle(\mathbf{k}, \mathbf{l''})$$

$$\angle(\mathbf{h}, \mathbf{l''}) < \angle(\mathbf{k}, \mathbf{l''}).$$

Ma

$$\angle(\mathbf{h}, \mathbf{l''}) < \alpha',\ \alpha'\equiv\beta',\ \beta' < \angle(\mathbf{k}, \mathbf{l''})$$

$\angle(\mathbf{h}, \mathbf{l''}) \equiv \angle(\mathbf{k}, \mathbf{l''})$ **(Se una angolo è congruente ad un altro anche il suo adiacente è congruente all'angolo adiacente).**

CONTRADDIZIONE!!!