

# Appunti alle Lezioni di Fondamenti di Matematica I

a.a. 2004-2005

Prof. Aldo Scimone

*“Lasciate aperta la porta all’errore,  
solo così entrerà la verità”*

*Tagore*



# AVVERTENZA

Tutto ciò che segue viene presentato solo in maniera schematica come traccia degli argomenti trattati durante le lezioni.

## Introduzione

### 1.1 Che cos'è un numero?

*Fin dall'infanzia ognuno di noi ha appreso a trafficare coi numeri (inizialmente coi numeri naturali, poi coi numeri decimali e le frazioni, successivamente coi numeri relativi).*

*Ogni persona, poi, abitualmente risolve problemi di varia natura svolgendo operazioni, tramite le quali a partire da certi numeri se ne ricavano altri; e questo, anche al di fuori dell'ambito scolastico, o tecnico, o scientifico.*

*L'imbianchino utilizza i numeri per calcolare le aree delle pareti che dovrà tinteggiare, la casalinga è sempre alle prese con percentuali e sconti, il giocatore si chiede qual è la probabilità di vincere puntando su una data combinazione alla roulette, o effettuando una certa giocata al lotto o al superenalotto; se andiamo a una determinata velocità, quante ore impiegheremo per coprire un certo percorso? ecc. ecc.*

*Siamo talmente abituati ad usare i numeri che a ben pochi viene in mente la domanda. "Che cos'è un numero?"*

Possiamo dire che, al di fuori della geometria, gran parte della storia della matematica può essere intesa come un tentativo di dare uno *statuto* ai numeri. Per rispondere alla domanda "Che cos'è un numero?" è necessario tenere presente in quale linguaggio essa venga posta. Infatti, al di fuori della matematica essa può anche non avere molto senso, mentre in matematica la domanda è ben posta, come hanno mostrato alcuni grandi matematici, fra i quali Richard Dedekind (1831-1916) che sull'argomento ha scritto nel 1888 un'opera fondamentale per la

cultura matematica: *Che cosa sono e che cosa devono essere i numeri.*

Nel parlare comune si può anche fare un po' di confusione nel rispondere alla domanda, perché i numeri vengono usati quasi sempre per designare qualche misura o qualche conteggio. Noi diciamo, per esempio, che abbiamo percorso 4 *chilometri* prima di arrivare in un certo posto oppure che ci sono volute 3 *ore* d'attesa prima di potere pagare un bollettino postale o, ancora, che viviamo in un appartamento di 160 *metri quadrati*.

In matematica i numeri sono invece *enti ideali*, proprio come lo sono in geometria i punti, le rette e i piani. In quanto tale, si può anche dire che *un numero è semplicemente un elemento di un insieme numerico*, anche se questa affermazione può sembrare in un primo momento semplicistica o lapalissiana.

Ma essa è giustificata dal fatto che gli insiemi numerici, che noi oggi denotiamo con alcune lettere dell'alfabeto, come  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , e i cui elementi sono i numeri, sono studiati in maniera approfondita da teorie matematiche che caratterizzano le proprietà di cui godono i loro elementi. Ciò ci permette di stabilire quando un certo *oggetto* può essere considerato *un numero* in senso matematico.

Ci sono voluti molti secoli per caratterizzare in modo appropriato gli insiemi numerici e il modo in cui si può passare dall'uno all'altro mediante *successive estensioni*.

Oggi gli insiemi numerici vengono denotati con le seguenti lettere:

**$\mathbb{N}$ : insieme dei numeri naturali;**

**$\mathbb{Z}$ : insieme dei numeri interi relativi;**

**$\mathbb{Q}$ : insieme dei numeri razionali relativi;**

**$\mathbb{Q}_a$  o  $\mathbb{Q}^+$ : insieme dei numeri razionali assoluti;**

**$\mathbb{R}$ : insieme dei numeri reali relativi;**

**$\mathbb{C}$ : insieme dei numeri complessi.**

Quindi, alla domanda: "che cos'è un numero naturale?" si potrà rispondere: "è un elemento di  $\mathbb{N}$ "; così potremo definire un

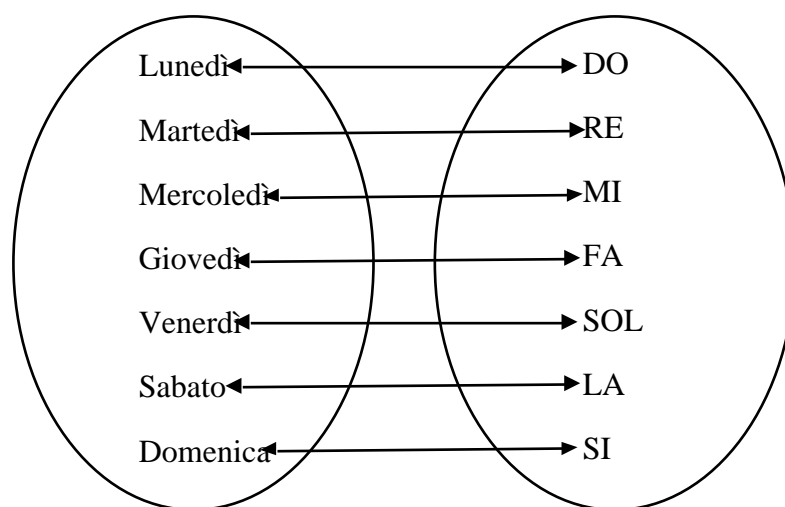
intero relativo come un elemento di  $\mathbb{Z}$  o un razionale relativo come un elemento di  $\mathbb{Q}$ ; specificando in ogni caso per quali caratteristiche ogni numero appartenga a un determinato insieme.

## 1.2 Il concetto di numero cardinale

Per numero cardinale di un insieme si intende il *numero totale* degli elementi dell'insieme.

Così, per esempio, se ho in mano cinque centesimi di euro, 5 è il numero cardinale dell'insieme dei centesimi che possiedo; 7 è il numero cardinale dell'insieme dei giorni che formano una settimana; 12 è il numero cardinale dell'insieme dei mesi che formano un anno, e così via.

Come nasce il concetto di numero cardinale di un insieme di elementi? Nasce dal confronto diretto tra un insieme preso come campione e altri insiemi. Consideriamo, per esempio, l'insieme A formato dai giorni della settimana, il cui numero cardinale è 7. Esso è il nostro insieme campione. Consideriamo l'insieme B delle note musicali e mettiamolo a confronto con A, cioè, apuriamo se possiamo fare corrispondere ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B e viceversa ad ogni elemento di B uno e un solo elemento di A. Se è possibile stabilire questa corrispondenza, allora noi diremo che l'insieme B ha lo stesso numero cardinale di A, ovvero 7. Possiamo indicare questa proprietà dei due insiemi scrivendo  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B) = 7$ .



Ebbene, ogni qualvolta è possibile fare fra due o più insiemi un confronto di questo tipo, si dice che fra gli insiemi considerati si stabilisce una *corrispondenza biunivoca*.

Quando due o più insiemi possono essere posti in corrispondenza biunivoca essi vengono detti *equipotenti*. Possiamo quindi dire che due insiemi sono equipotenti quando hanno lo stesso numero cardinale e viceversa.

Possiamo anche pensare alla *equipotenza* fra insiemi come ad una relazione tale che essi hanno lo stesso numero di elementi, ovvero lo stesso numero cardinale. Ciò ci permette di riunire assieme tutti gli insiemi della stessa cardinalità. Così, possiamo pensare di mettere assieme tutti gli insiemi il cui numero cardinale è 2. Tutti questi insiemi formeranno un insieme al quale potremo dare come *etichetta* proprio 2, per significare che esso contiene tutti gli insiemi di due elementi. In questo modo possiamo etichettare tutti gli insiemi finiti con i loro numeri cardinali posti in ordine crescente: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

L'insieme di tutti questi cardinali formeranno un insieme che chiameremo insieme dei numeri naturali:

Il concetto di numero cardinale ci permette di assegnare un numero cardinale anche agli insiemi infiniti, cioè, a quegli insiemi che possono essere posti sempre in corrispondenza biunivoca con una loro parte. Per esempio, l'insieme dei numeri naturali può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali pari, che si ottengono contando di due in due cominciando dallo zero: 0, 2, 4, 6, 8, ..., insieme che possiamo indicare con  $P$  e che è contenuto nell'insieme dei naturali. Ebbene, i cardinali degli insiemi infiniti si chiamano *numeri transfiniti*, ma su di essi non possiamo soffermarci.

### **1.3 Il concetto di numero ordinale**

Il matematico Keith Devlin, nel suo libro "*Il Gene della Matematica*" (Longanesi & C., 2002) scrive:

“Quel che è certo è che il nostro cervello sembra trattare diversamente gli insiemi contenenti al massimo tre elementi da quelli più grandi. [...] Il fatto che quando si superano i tre oggetti il nostro comportamento cambi all'improvviso indica che forse il cervello si serve, nei due casi, di due meccanismi diversi.

Per insiemi contenenti al massimo tre elementi, il riconoscimento della numerosità, ossia del numero degli elementi dell'insieme, sembra pressoché istantaneo e viene effettuato senza contare. Per insiemi di quattro o più elementi, tuttavia, il risultato viene ottenuto plausibilmente contando. [...] Comunque, anche se per decidere la numerosità di insiemi contenenti più di tre elementi ci serviamo di un meccanismo diverso, **il concetto umano di numero si fonda quasi certamente sul nostro senso innato del numero quale proprietà caratteristica di insiemi di oggetti fisici distinti.**”

Queste parole ci fanno riflettere sul fatto che per passare dal senso innato del numero al vasto regno della Matematica sono necessarie due facoltà:

- **la capacità di contare;**
- **l'uso di simboli arbitrari per rappresentare i numeri.**

Queste due abilità furono acquisite dai nostri progenitori in un periodo della storia umana compreso tra 75.000 e 200.000 anni fa, quando l'*Homo Sapiens* prese il volo.

Contare e dire quanti elementi siano contenuti in un insieme non è la stessa cosa.

Il numero cardinale di un insieme non è che un *dato* relativo a quell'insieme.

Contare gli elementi di un insieme è invece un processo che comporta due operazioni:

- a. gli elementi devono essere disposti secondo un certo ordine;**
- b. si procede a contarli uno per uno seguendo quell'ordine.**

**“L'atto del contare trasformò la nozione concreta ed eterogenea di pluralità nel concetto *omogeneo ed astratto di numero* che rese possibile la Matematica.”** (Dantzig)

Se entriamo in una sala da cinema ci basta un'occhiata per capire, *senza contare*, se gli spettatori sono in numero maggiore delle poltrone o in numero uguale o minore. Ciò avviene perché, come abbiamo detto prima, applichiamo un procedimento che domina tutta la matematica: la ***corrispondenza biunivoca***. Esso

consiste nell'assegnare ad ogni elemento di uno dei due insiemi un elemento dell'altro, continuando così finché uno dei due insiemi o entrambi sono esauriti.

Molti popoli primitivi calcolavano e calcolano in questo modo. Abbiamo appurato come l'origine del **numero cardinale** sia proprio questa.

Per contare bisogna escogitare un sistema di numerazione, per potere disporre di una successione *ordinata*, che proceda in senso crescente: uno, due, tre, ...

Quando contiamo gli elementi di un dato insieme noi li separiamo mentalmente e materialmente uno alla volta e queste successive operazioni di separazione ci portano implicitamente ad ordinare gli elementi dell'insieme in modo che, giunti all'ultimo elemento, **otterremo simultaneamente sia il numero ordinale dell'ultimo elemento contato sia il numero cardinale dell'insieme.**

**Il progresso della matematica è stato dovuto al fatto che l'Uomo ha imparato a identificare i due aspetti del numero: il cardinale e l'ordinale.**

Infatti, il numero cardinale non consente da solo a creare un'aritmetica, perché **le operazioni dell'aritmetica sono basate sulla tacita ammissione che possiamo sempre passare da un qualsiasi numero al successivo: questa è l'essenza del concetto di numero ordinale.**

È importante tenere presente che, qualunque sia l'ordine con cui si dispongono gli elementi di un dato insieme, si può dimostrare che all'ultimo elemento spetta sempre lo stesso numero ordinale. Questa proprietà, enunciata da E. Schröder, costituisce il *principio d'invarianza del numero*.

## **2. L'insieme dei numeri naturali**

L'insieme dei numeri naturali che si indica con

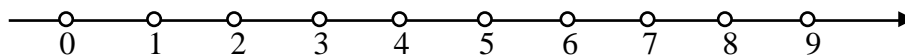
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

è un insieme **infinito** e **discreto** perché tra due numeri naturali o non vi è alcun numero o ve ne sono sempre in numero finito.

Così, tra 13 e 14 non vi è alcun numero; mentre tra 24 e 29 ce ne sono quattro: 25, 26, 27 e 28. Si può anche considerare l'insieme  $N_0$ , cioè, l'insieme  $N$  privato dello zero:

$$N_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

L'insieme  $N$  può essere rappresentato mediante punti su una retta orientata:



I numeri naturali si possono confrontare:

Dati due numeri naturali  $a$  e  $b$  qualsiasi, vale per essi la **legge della tricotomia**:

- o sono uguali**                     $a = b$
- o  $a$  è maggiore di  $b$**          $a > b$
- o  $a$  è minore di  $b$**            $a < b$

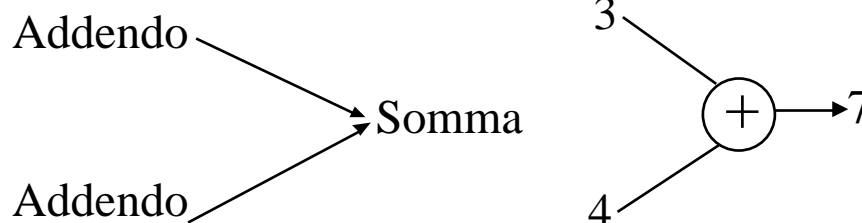
## 2. 1 Le operazioni in $N$

Nell'insieme  $N$  vengono definite le quattro operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

In generale, si può dire che un'operazione aritmetica è un *procedimento* che ci permette di associare a due numeri un terzo numero che soddisfi determinate condizioni.

I due numeri si dicono *termini* dell'operazione e il terzo numero che si ottiene si dice *risultato* dell'operazione.

### 2.2.1 Addizione



### Proprietà



**- Commutativa**

$$a, b \in \mathbb{N}: a + b = b + a$$

**- Associativa**

$$a, b, c \in \mathbb{N}: (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

**-Elemento neutro 0:**

$$a \in \mathbb{N}: a + 0 = 0 + a = a$$

**2.2.2 Sottrazione**



Non sempre si può eseguire la sottrazione in  $\mathbb{N}$ ; il minuendo *deve essere maggiore o uguale* al sottraendo.

Dato che non è sempre possibile eseguire la sottrazione in  $\mathbb{N}$ , si dice che **essa non è un'operazione interna** a  $\mathbb{N}$  o anche che  $\mathbb{N}$  **non è chiuso** rispetto alla sottrazione.

**Proprietà**

**- Invariantiva**

Aggiungendo o togliendo uno stesso numero sia al minuendo che al sottraendo di una sottrazione, la differenza non cambia:

$$\begin{aligned} a - b &= (a + c) - (b + c) \\ 14 - 8 &= (14 + 3) - (8 + 3) = 17 - 11 = 6 \end{aligned}$$

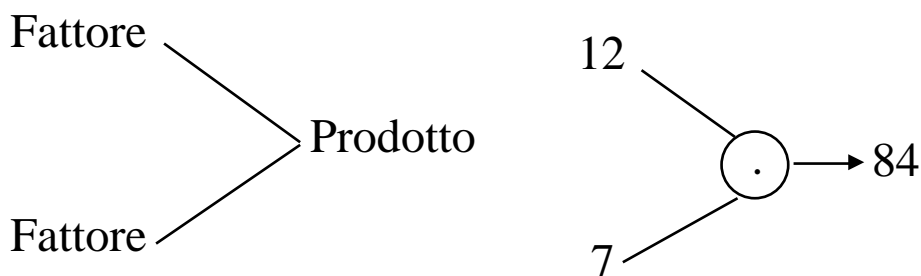
$$\begin{aligned} a - b &= (a - c) - (b - c) \\ 21 - 9 &= (21 - 7) - (9 - 7) = 14 - 2 = 12 \end{aligned}$$

**- Distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione**

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

**La sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione.**

**2.2.3 Moltiplicazione**



**Proprietà**

**- Commutativa**

$$a, b, \in \mathbb{N}: \quad a \cdot b = b \cdot a$$

**- Associativa**

$$a, b, c \in \mathbb{N}: \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

**- Distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione**

$$a, b, c \in \mathbb{N}: \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

**- Elemento neutro 1:**

$$a \in \mathbb{N}: \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

**- Legge di annullamento del prodotto**

-Se in una moltiplicazione di n fattori, uno dei fattori è 0, il prodotto è 0:

$$3 \cdot 34 \cdot 0 \cdot 12 = 0$$

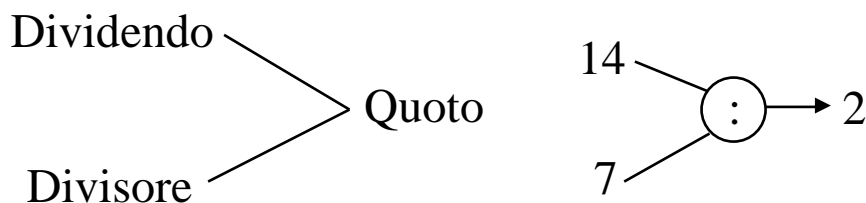
Si dice anche che lo 0 *assorbe* il risultato della moltiplicazione, per cui esso è l'**elemento assorbente della moltiplicazione**.

-Se un prodotto di n fattori è 0, uno almeno dei fattori è 0:

$$3 \cdot 11 \cdot \square \cdot 23 = 0$$

↓  
0

#### 2.2.4 Divisione



La divisione in  $\mathbb{N}$  non si può eseguire sempre: *il dividendo deve essere un multiplo del divisore.*

Dato che non è sempre possibile eseguire la divisione in  $\mathbb{N}$ , si dice che **essa non è un'operazione interna** a  $\mathbb{N}$  o anche che  $\mathbb{N}$  **non è chiuso** rispetto alla divisione.

#### Proprietà

##### - Invariantiva

Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero  $\neq 0$  sia il dividendo che il divisore, il quoto non cambia:

$$a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) \quad 18 : 6 = (18 \cdot 3) : (6 \cdot 3) = 54 : 18 = 3$$

$$a : b = (a : c) : (b : c) \quad 18 : 6 = (18 : 3) : (6 : 3) = 6 : 2 = 3$$

**Se la divisione è con il resto, questo sarà moltiplicato o diviso per il numero considerato.**

Esempio:

$$45 = 7 \cdot 6 + 3$$

se  $(45 \cdot 2) = 90$ , e  $(7 \cdot 2) = 14$ , allora:

$$90 = 14 \cdot 6 + 6$$

**- Distributiva destra della divisione rispetto all'addizione e alla sottrazione**

$$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$$

$$(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$$

**ATTENZIONE. L'analogia proprietà a sinistra non vale:**

$$a : (b + c) \neq (a : b) + (a : c)$$

**- Lo 0 nella divisione**

- $0 : a = 0$  qualunque sia  $a \neq 0$  (infatti  $a \cdot 0 = 0$ );
- $a : 0$  è **impossibile** per ogni  $a \neq 0$  (infatti nessun numero moltiplicato per 0 dà a);
- $0 : 0$  è **indeterminato** (infatti ogni numero moltiplicato per 0 dà 0).

**La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.**

## **3. Potenze di numeri naturali**

### **3.1 La potenza in $\mathbb{N}$**

L'elevamento a potenza è l'operazione che ci permette di associare a due numeri  $a$  e  $n$ , detti rispettivamente *base* ed *esponente*, un terzo numero, detto *potenza*, a cui si perviene moltiplicando per se stessa la base tante volte quante sono le unità dell'esponente:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

### **3.2 Proprietà delle potenze**

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $m \geq n$ )

- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a : b)^n = a^n : b^n$

### Avvertenza

- $1^n = 1$
- $0^n = 0$
- $0^0$  non ha alcun significato
- $a^0 = 1$  per ogni numero naturale  $a$

### 3.3 Ordine di grandezza di un numero

Le potenze ci permettono di scrivere in maniera più semplice numeri molto grandi o molto piccoli.

#### Esempi

- **Numeri grandi**

|                 |                        |
|-----------------|------------------------|
| $10^0 = 1$      | $10^5 = 100.000$       |
| $10^1 = 10$     | $10^6 = 1.000.000$     |
| $10^2 = 100$    | $10^7 = 10.000.000$    |
| $10^3 = 1.000$  | $10^8 = 100.000.000$   |
| $10^4 = 10.000$ | $10^9 = 1.000.000.000$ |

$$3.000.000 = 3 \cdot 10^6$$

$$9.000.000.000 = 9 \cdot 10^9$$

$$27.000.000.000.000 = 27 \cdot 10^{12}$$

- **Numeri piccoli**

Anche i numeri piccoli si possono scrivere mediante le potenze del 10, ma dobbiamo fare una digressione sui numeri decimali,

che riconsidereremo quando parleremo dell'insieme dei numeri razionali.

Come è noto, per scrivere i numeri, noi utilizziamo **il sistema di numerazione decimale**, cioè, dieci simboli:

**0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

che vengono dette **unità del I ordine** con cui si indicano i numeri che vanno da zero a nove.

I numeri maggiori di nove si scrivono tenendo presente che:

- Dieci unità del I ordine costituiscono una **decina** (unità del II ordine);
- Dieci decine costituiscono un **centinaio** (unità del III ordine);
- Dieci centinaia costituiscono un **migliaio** (unità del IV ordine);
- Dieci migliaia costituiscono una **decina di migliaia** (unità del V ordine);
- Dieci decine di migliaia costituiscono un **centinaio di migliaia** (unità del VI ordine);
- Dieci centinaia di migliaia costituiscono un **milione** (unità del VII ordine);
- Gli ordini si raggruppano a tre a tre in gruppi chiamati **classi**

Per esempio, consideriamo il numero 5673907, il valore relativo delle sue cifre è il seguente:

|          |                             |                          |          |           |          |          |
|----------|-----------------------------|--------------------------|----------|-----------|----------|----------|
| <b>5</b> | <b>6</b>                    | <b>7</b>                 | <b>3</b> | <b>9</b>  | <b>0</b> | <b>7</b> |
| milioni  | centinaia<br>di<br>migliaia | decine<br>di<br>migliaia | migliaia | centinaia | decine   | unità    |

Il nostro sistema di numerazione è **posizionale** perché il valore relativo di una cifra dipende dalla sua posizione.

Prendiamo ora una unità del I ordine e dividiamola in 10 parti uguali. Otteniamo allora la *decima parte* dell'unità o un **decimo**: 0,1;  
se la dividiamo in 100 parti uguali otterremo un **centesimo**: 0,01;  
se la dividiamo in 1000 parti uguali otterremo un **millesimo**: 0,001; e così via.

I numeri che si possono scrivere con queste unità decimali si chiamano **numeri decimali** (anche se il termine è improprio).

Per esempio, il numero 576,834 rappresenta:

5 centinaia + 7 decine + 6 unità + 8 decimi + 3 centesimi + 4 millesimi.

Esaminiamo che cosa succede con le potenze dei numeri decimali.

$$0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$$

$$1,2^4 = 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 2,0736$$

$$0,04^3 = 0,04 \cdot 0,04 \cdot 0,04 = 0,000064$$

Possiamo scrivere i risultati anche nel modo seguente:

$$0,2^3 = 0,008 = 8 \cdot 0,001$$

$$1,2^4 = 2,0736 = 20736 \cdot 0,0001$$

$$0,04^3 = 0,000064 = 64 \cdot 0,000001$$

D'altra parte

$$0,001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

$$0,0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$$

$$0,000001 = \frac{1}{1000000} = \frac{1}{10^6}$$

Se, allora, conveniamo di scrivere, per definizione, che.

$$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

$$\frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

$$\frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

possiamo scrivere i numeri considerati nel modo seguente:

$$0,2^3 = 0,008 = 8 \cdot 0,001 = 8 \cdot 10^{-3}$$

$$1,2^4 = 2,0736 = 20736 \cdot 0,0001 = 20736 \cdot 10^{-4}$$

$$0,04^3 = 0,000064 = 64 \cdot 0,000001 = 64 \cdot 10^{-6}$$

**Concludendo, anche i numeri molto piccoli possono essere rappresentati utilizzando le potenze del 10, ma con esponente negativo.**

Bisogna tenere presente la convenzione fatta:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### 3.4 Notazione scientifica di un numero

Mediante le potenze del 10 sia ad esponente intero positivo che negativo possiamo scrivere numeri molto grandi o molto piccoli



mediante una scrittura che viene detta **notazione scientifica del numero**.

**La regola pratica è la seguente:**

- a) si scrive la prima cifra del numero;
- b) si inserisce la virgola;
- c) si scrivono le altre cifre;
- d) si moltiplica tutto per la potenza del 10 che ha come esponente il numero di cifre che si trovano dopo la virgola.

**Esempi:**

1. Scriviamo in notazione scientifica il numero  $n = 3.456.707$ .  
Si ha:

$$3.456.707 = 3,456707 \cdot 10^6$$

2. Scriviamo il numero 0,0000367

$$0,0000367 = 3,67 \cdot 10^{-5}$$

### 3.4.1 Ordine di grandezza di un numero

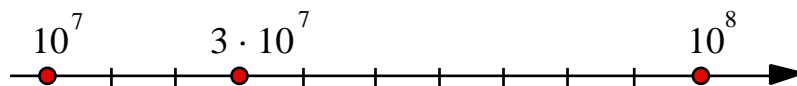
Spesso, quando si ha a che fare con numeri molto grandi o molto piccoli piuttosto che il valore esatto della misura di una grandezza si preferisce conoscere l'**ordine di grandezza**, cioè, **la potenza di 10 che più si avvicina a quel numero**.

Per esempio, la temperatura all'interno delle stelle può aggirarsi intorno a 28.500.000 °C.

Arrotondando per eccesso questo numero, si ha 30.000.000 °C che possiamo scrivere come  $3 \cdot 10^7$ . Le due potenze di 10 fra cui è compreso questo numero sono:

$$10^7 < 3 \cdot 10^7 < 10^8$$

per cui diremo che *l'ordine di grandezza* di  $3 \cdot 10^7$  è  $10^7$ .



La dimensione di un microbo è di circa 0,000009 m, che possiamo anche scrivere  $9 \cdot 10^{-6}$  m. Questo numero è compreso tra

$$10^{-6} < 9 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$$

per cui *l'ordine di grandezza* sarà  $10^{-5}$ .

#### 4. Numeri primi

Tra i numeri naturali, i numeri primi sono quelli che sono divisibili **soltanto** per se stessi e per l'unità.

Per esempio, i numeri 2, 3, 7, 11, 13 sono primi, mentre non lo sono 4, 6, 12 perché, oltre che per l'unità e per se stessi, sono divisibili anche per altri numeri. Essi vengono detti **numeri composti**. Come si costruisce praticamente una tavola di primi?

Uno dei metodi più antichi è il cosiddetto “crivello di Eratostene, che prende nome da Eratostene di Cirene (circa 276-195 a.C.) che iniziò i suoi studi a Cirene, li continuò ad Alessandria con il poeta Callimaco e li proseguì ad Atene, dove ascoltò gli insegnamenti degli eredi dell'Accademia e del Liceo.

Il *crivello* usato per separare i numeri primi dai composti si ispira proprio ad un setaccio, come quello, per esempio, che serve per separare la crusca dalla farina, e, per il metodo usato, il nome è scelto appropriatamente. Infatti, alla base di questo procedimento così semplice ed elegante sta proprio l'idea di “setacciare” tutti i numeri naturali, in modo che i numeri composti vengano separati dai numeri primi. Quest'idea è molto suggestiva e colpisce sicuramente l'immaginazione di chi si accosta per la prima volta al metodo di Eratostene. A tale scopo basta scrivere i numeri naturali in successione, com'è mostrato nella tabella che segue, escludendo il numero 1. Il primo passo da effettuare sarà quello di togliere tutti i multipli di 2:

|    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  | 11  |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  | 21  |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  | 31  |
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  | 41  |
| 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  | 51  |
| 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  | 61  |
| 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  | 71  |
| 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  | 81  |
| 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  | 91  |
| 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | ... |

|   |    |  |    |  |    |  |    |  |     |
|---|----|--|----|--|----|--|----|--|-----|
| 2 | 3  |  | 5  |  | 7  |  | 9  |  | 11  |
|   | 13 |  | 15 |  | 17 |  | 19 |  | 21  |
|   | 23 |  | 25 |  | 27 |  | 29 |  | 31  |
|   | 33 |  | 35 |  | 37 |  | 39 |  | 41  |
|   | 43 |  | 45 |  | 47 |  | 49 |  | 51  |
|   | 53 |  | 55 |  | 57 |  | 59 |  | 61  |
|   | 63 |  | 65 |  | 67 |  | 69 |  | 71  |
|   | 73 |  | 75 |  | 77 |  | 79 |  | 81  |
|   | 83 |  | 85 |  | 87 |  | 89 |  | 91  |
|   | 93 |  | 95 |  | 97 |  | 99 |  | ... |

Nel secondo passo si cancellano tutti i multipli di 3, e nel terzo tutti i multipli di 5, poi di 7, e così via:

|   |    |  |    |  |    |  |    |  |     |
|---|----|--|----|--|----|--|----|--|-----|
| 2 | 3  |  | 5  |  | 7  |  |    |  | 11  |
|   | 13 |  |    |  | 17 |  | 19 |  |     |
|   | 23 |  | 25 |  |    |  | 29 |  | 31  |
|   |    |  | 35 |  | 37 |  |    |  | 41  |
|   | 43 |  |    |  | 47 |  | 49 |  |     |
|   | 53 |  | 55 |  |    |  | 59 |  | 61  |
|   |    |  | 65 |  | 67 |  |    |  | 71  |
|   | 73 |  |    |  | 77 |  | 79 |  |     |
|   | 83 |  | 85 |  |    |  | 89 |  | 91  |
|   |    |  | 95 |  | 97 |  |    |  | ... |

|   |    |  |   |  |    |  |    |  |     |
|---|----|--|---|--|----|--|----|--|-----|
| 2 | 3  |  | 5 |  | 7  |  |    |  | 11  |
|   | 13 |  |   |  | 17 |  | 19 |  |     |
|   | 23 |  |   |  |    |  | 29 |  | 31  |
|   |    |  |   |  | 37 |  |    |  | 41  |
|   | 43 |  |   |  | 47 |  |    |  |     |
|   | 53 |  |   |  |    |  | 59 |  | 61  |
|   |    |  |   |  | 67 |  |    |  | 71  |
|   | 73 |  |   |  |    |  | 79 |  |     |
|   | 83 |  |   |  |    |  | 89 |  |     |
|   |    |  |   |  | 97 |  |    |  | ... |

Ciò che rimane è appunto l'insieme dei *numeri primi*:

**2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...**

**Si dimostra che i numeri primi sono infiniti.**

#### 4.1 Fattorizzazione dei numeri composti

La conoscenza dei numeri primi è importante per molte ragioni, una di queste è la fattorizzazione dei numeri composti, cioè la possibilità di scrivere i numeri composti come il prodotto di fattori primi.

Per esempio

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

La fattorizzazione ci permette di stabilire se due numeri naturali sono o non sono divisibili l'uno per l'altro senza eseguire la divisione.

Inoltre, essa è utile per determinare tutti i divisori di un dato numero.

#### 4.1.1 Quanti sono i divisori di un numero?

Per rispondere alla domanda esaminiamo un esempio. Supponiamo di volere determinare tutti i divisori di 72. Scomponendo il numero in fattori primi si ha:

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

I divisori formati dal solo fattore 2 sono 2, 4, 8; dal solo fattore 3 sono 3 e 9, cioè, i suoi divisori sono:

|               |   |   |   |
|---------------|---|---|---|
| potenze di 2: | 2 | 4 | 8 |
| potenze di 3: | 3 | 9 |   |

Quindi, 72 ha 3 divisori sulla prima riga, 2 nella seconda, 6 combinando le due righe; inoltre ha come divisore 1. Se indichiamo con  $d(72)$  il numero totale dei divisori di 72, possiamo scrivere:

$$d(72) = 3 \cdot 2 + 3 + 2 + 1$$

che si può scrivere:

$$d(72) = (3 + 1) \cdot (2 + 1)$$

In generale, se abbiamo la fattorizzazione di un numero  $n$ :

$$n = 2^a \cdot 3^b$$

si avranno  $a$  divisori dati dalle potenze di 2 e  $b$  divisori dati dalle potenze di 3,  $a \cdot b$  divisori ottenuti combinando le due serie e 1, cioè:

$$d(n) = (a + 1) \cdot (b + 1).$$

Ebbene, si può dimostrare in generale che:

**Se un numero naturale  $n$  si fattorizza così:**

$$n = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot \dots \cdot t^v$$

**il numero dei suoi divisori è:**

$$d(n) = (a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1) \cdot \dots \cdot (v + 1)$$

#### 4.2 MCD e mcm

La fattorizzazione ci permette, inoltre, di determinare il **massimo comun divisore** (cioè, il più grande fra i divisori comuni tra due o più numeri) e il **minimo comune multiplo** (cioè, il più piccolo fra i multipli comuni a due o più numeri) di due o più numeri.

Per determinare il **Massimo Comune Divisore** tra due numeri si può anche usare il metodo delle divisioni successive o **algoritmo euclideo delle divisioni successive**.

Se il resto della divisione fra due numeri è 0 allora il MCD tra essi è il numero più piccolo. Se il resto non è 0, allora si divide il quoziente  $q$  per il resto  $r$  ottenendo un nuovo quoziente  $q'$  e un nuovo resto  $r'$ . Questo processo si itera a partire da  $r$  nel ruolo di dividendo ed  $r'$  in quello di divisore, finché non si ottiene un resto nullo. Si può dimostrare allora che l'ultimo divisore non nullo è il MCD cercato.

Illustriamo il metodo con un esempio. Determiniamo il MCD tra 1320 e 252.

Dividiamo il maggiore per il minore:

$$1320 = 252 \cdot 5 + 60$$

dato che il resto è diverso da zero, dividiamo 252 per 60:

$$252 = 60 \cdot 4 + 12$$

dato che il resto è diverso da zero, dividiamo 60 per 12:

$$60 = 12 \cdot 5 + 0$$

Dato che l'ultimo resto è zero, l'ultimo divisore, cioè 12, è il massimo comune divisore cercato.

Mediante il massimo comun divisore è possibile calcolare il minimo comune multiplo fra due numeri tenendo presente la relazione (che si dimostra):

$$mcm(a, b) = \frac{a b}{MCD(a, b)}$$

**Bisogna fare però attenzione al fatto che questa relazione può non essere più vera tra più di due numeri!**

## **5. Il concetto ricorsivo di numero naturale**

Per quanto riguarda il concetto di numero naturale, che è un concetto complesso, abbiamo considerato due differenti “approcci”: quello cardinale e quello ordinale. Ma vi sono altri punti di vista, come l'approccio ricorsivo secondo Peano o quello basato sulla misura.

Giuseppe Peano (1858-1932) espose l'*Aritmetica* in forma di sistema ipotetico-deduttivo nell'opera "*Arithmetices Principa nova methodo exposita*" del 1889 in cui assunse quattro concetti primitivi: *numero*, *unità*, *successivo* e *uguale* e nove assiomi, di cui quattro riguardanti l'eguaglianza.

In seguito assunse soltanto i concetti primitivi di *zero*, *numero naturale*, e *successivo* di un numero naturale.

I cinque assiomi sono:

**I - Zero è un numero naturale;**

**II - Il successivo di un numero naturale è un numero naturale;**

**III - Numeri naturali che hanno lo stesso successivo sono uguali;**

**IV - Zero non è successivo di alcun numero naturale;**

**V - Sia S un insieme di numeri naturali: se zero è un elemento di S e se ogni qualvolta un numero naturale n sta in S anche il successivo di n sta in S, allora tutta la classe dei numeri naturali è contenuta in S.**

Quest'ultimo assioma è l'assioma dell'*induzione matematica*.  
 Peano assume come assiomi anche le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva dell'uguaglianza.

Il successivo del numero  $a$  si indica con  $a^+$ .

L'**addizione** viene introdotta affermando che per ogni coppia  $a$  e  $b$  di naturali esiste un'unica somma tale che

$$a + 0 = a$$

$$a + b^+ = (a + b)^+$$

**Esempio**

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1 + 0^+ = (1 + 0)^+ = 1^+ = 2$$

$$1 + 2 = 1 + 1^+ = (1 + 1)^+ = 2^+ = 3$$

.....

La **moltiplicazione** viene definita affermando che per ogni coppia  $a$  e  $b$  di naturali esiste un'unico prodotto tale che

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot b^+ = (a \cdot b) + a$$

**Esempio**

$$3 \cdot 5^+ = (3 \cdot 5) + 3 = 15 + 3 = 18$$

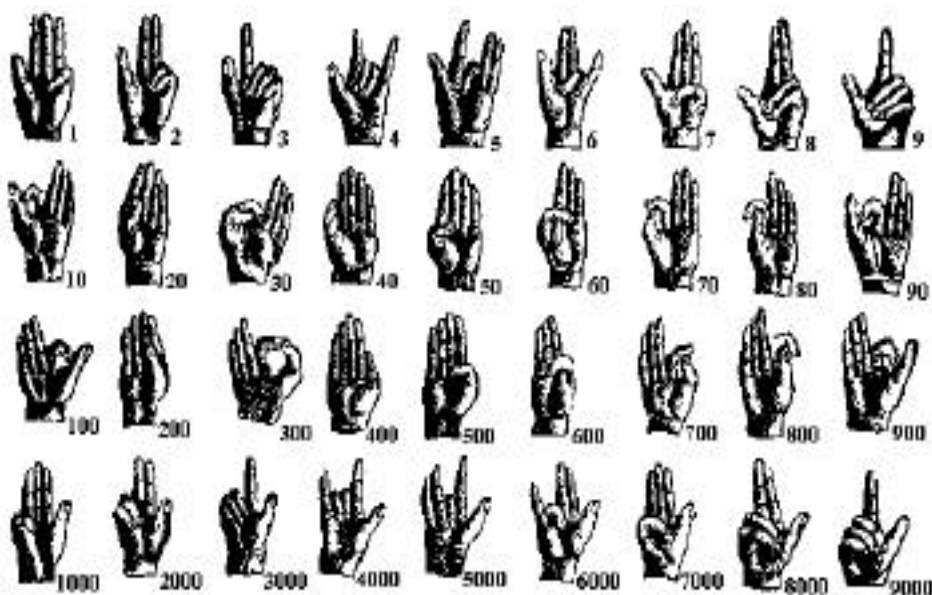
Peano stabilisce poi tutte le solite proprietà dei naturali. Il suo approccio viene detto *ricorsivo* proprio perché i numeri naturali vengono ottenuti ricorsivamente mediante le suddette operazioni che sfruttano la nozione di successivo e il principio di induzione completa.

Riassumendo:

**L'approccio ricorsivo ai numeri naturali consiste in questo: si rinuncia a dire che cosa è un numero naturale, mentre si precisa come funziona il sistema dei numeri naturali dando un sistema di assiomi basato sull'idea di *successivo* e sul *principio d'induzione completa*.**

Inoltre, gli assiomi di Peano **descrivono** ma non **caratterizzano** i numeri naturali, nel senso che esistono altri insiemi, oltre  $\mathbb{N}$ , che soddisfano agli assiomi di Peano (come l'insieme dei numeri pari).

**Quindi gli assiomi di Peano forniscono una *descrizione* ma non una *definizione* dell'insieme  $\mathbb{N}$ .**



**Rappresentazione dei numeri mediante le dita delle mani  
(da un manuale di aritmetica pubblicato nel 1520)**

## 7. I numeri relativi

Come sappiamo, in  $\mathbb{N}$  la sottrazione non è un'operazione interna, perché essa è possibile se e solo se il minuendo è maggiore del sottraendo.

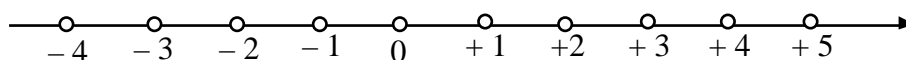
L'esigenza di potere eseguire la sottrazione anche quando il minuendo è minore del sottraendo, porta a considerare un insieme di numeri più ampio di  $\mathbb{N}$ , l'insieme dei **numeri relativi** o **numeri con il segno**.



L'insieme viene designato con la lettera  $Z$  (iniziale della parola tedesca “*Zahlen*” che significa “*numero*”):

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots \}$$

$Z$  è un insieme **discreto** come quello dei numeri naturali e può essere rappresentato su una retta orientata con punti a destra e a sinistra dello 0:



Per i numeri positivi vale lo stesso ordinamento di  $N$ .

Per il confronto valgono le regole:

- **ogni numero negativo è minore di 0;**
- **ogni numero positivo è maggiore di 0;**
- **ogni numero negativo è minore di un qualunque numero positivo;**
- **presi due qualunque numeri negativi  $a$  e  $b$  si ha :  
 $a < b$  se e solo se  $|a| > |b|$ .**

Con il simbolo  $|a|$  si intende **il valore assoluto** di un numero relativo che viene definito come segue:

$$|a| = a \quad \text{se } a > 0;$$

$$|a| = -a \quad \text{se } a < 0;$$

$$|0| = 0$$

Valgono le seguenti proprietà, per ogni  $a, b$  di  $Z$ :

$$1) |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$2) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

## 7.1 Le operazioni in $Z$

In  $Z$  si possono eseguire le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, ed elevamento a potenza.

### 7.1.1 Addizione

Per l'addizione valgono le stesse proprietà dell'addizione in  $\mathbb{N}$ , in più:

*ogni numero relativo ha un opposto, cioè, esiste sempre un numero che sommato a esso dà 0.*

Per quanto riguarda l'**addizione**, considerati due numeri  $m, n \in \mathbb{Z}$  (positivi o negativi), la loro somma  $m + n$  viene definita come il numero che si ottiene a partire da  $m$ , passando  $|n|$  volte al successivo, se  $n$  è positivo e passando  $|n|$  volte al precedente se  $n$  è negativo.

Si hanno, quindi, le regole seguenti:

- **quando  $m$  ed  $n$  sono concordi, la loro somma è uguale alla somma dei loro valori assoluti, preceduta dal segno comune.**

$$\begin{aligned} (+3) + (+11) &= +14 \\ (-7) + (-15) &= -22 \end{aligned}$$

- **quando  $m$  ed  $n$  sono discordi, la loro somma è uguale alla differenza dei loro valori assoluti, preceduta dal segno del numero il cui valore assoluto sia maggiore.**

$$\begin{aligned} (+3) + (-11) &= -8 \\ (-4) + (+15) &= +11 \end{aligned}$$

- **la somma di due numeri opposti è nulla.**

Tale operazione, ristretta ai soli numeri  $\geq 0$ , coincide con la struttura additiva di  $\mathbb{N}$ .

#### Proprietà dell'addizione

- è un'operazione interna,
- commutativa
- associativa.

Inoltre:

- **0 è l'elemento neutro dell'addizione**
- **per ogni numero relativo esiste l'elemento simmetrico rispetto all'addizione.**

### 7.1.2 Moltiplicazione

Passando alla **moltiplicazione**, considerati due numeri relativi  $m, n \in \mathbb{Z}$ , il loro prodotto  $m \cdot n$  viene definito come il numero il cui valore assoluto è il prodotto dei valori assoluti di  $m$  e  $n$ . Per quanto riguarda il segno del prodotto si fa la convenzione che esso sia  $+$  se entrambi i numeri hanno lo stesso segno (cioè, sono *concordi*) e  $-$  se hanno segni opposti (cioè, sono *discordi*).

**Bisogna tenere presente che la regola dei segni (in particolare “ $- \cdot - = +$ ”) non ha nulla di misterioso, ma viene definita in questo modo perché è l'unica per la quale l'addizione e la moltiplicazione, estese a  $\mathbb{Z}$ , continuano a godere delle stesse proprietà formali di cui godono le omonime operazioni introdotte su  $\mathbb{N}$ .**

#### Proprietà della moltiplicazione

- **è un'operazione interna,**
- **commutativa**
- **associativa.**

Inoltre:

- **$+1$  è l'elemento neutro della moltiplicazione**
- **per ogni numero relativo esiste l'elemento simmetrico rispetto alla moltiplicazione.**

### 7.1.3 Potenza a esponente naturale

In  $\mathbb{Z}$  non è più possibile interpretare l'elevamento a potenza come addizione ripetuta, come si fa nell'insieme  $\mathbb{N}$ .

Essendo la potenza un modo abbreviato per indicare un prodotto, per le potenze dei numeri positivi si procede nello stesso modo che per i naturali; le potenze dei numeri negativi saranno numeri positivi quando l'esponente è pari, negativi se l'esponente è dispari. Inoltre, si pone  **$a^0 = 1$  qualunque sia  $a \neq 0$ .**

### 7.1.4 La sottrazione

La sottrazione diventa sempre possibile in  $\mathbb{Z}$ , e si traduce nel sommare al primo numero l'opposto del secondo:

$$\begin{aligned} (+3) - (-12) &= (+3) + (+12) = +15 \\ (-34) - (-11) &= (-34) + (+11) = -23 \end{aligned}$$

**Proprietà della sottrazione:**

- è un'operazione interna
- gode della proprietà invariantiva.

### 7.1.5 La divisione

La divisione tra due interi relativi può essere interpretata come una moltiplicazione del primo numero per l'inverso del secondo, per cui i segni dei quozienti possono essere determinati come quelli dei prodotti.

**Proprietà della divisione:**

- gode della proprietà invariantiva
- è distributiva rispetto alla somma algebrica

**Si può dimostrare che è sempre possibile eseguire la “divisione con resto” fra due numeri interi  $a$ ,  $b$  con  $b \neq 0$ .**

Esempi:

Siano  $a = -5$ ,  $b = 2$ , allora si ha:

$$-5 = 2 \cdot (-3) + 1$$

Siano  $a = 8$ ,  $b = -3$ , allora si ha:

$$8 = (-3) \cdot (-2) + 2$$

**L'insieme  $\mathbb{Z}$  è un insieme chiuso rispetto all'addizione, alla sottrazione e alla moltiplicazione.**

## 8. L'insieme dei numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali, detto anche insieme delle frazioni, può essere introdotto in vari modi.

1. Abbiamo visto che per far sì di potere eseguire sempre la sottrazione ampliamo l'insieme dei numeri naturali passando all'insieme dei numeri interi relativi.

Nello stesso modo, per potere eseguire sempre la divisione ampliamo la struttura  $\mathbb{Z}$   $(+, \cdot)$  in una struttura  $\mathbb{Q}$   $(+, \cdot)$  nella quale ogni elemento diverso da zero ammette inverso, cioè per ogni  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $(a \neq 0)$ , esiste un  $b \in \mathbb{Q}$  tale che  $a \cdot b = 1$ .

L'ampliamento viene realizzato nel modo seguente. Consideriamo l'insieme delle coppie di interi  $(a, b)$ , con  $b \neq 0$ . Introduciamo in questo insieme la relazione  $\mathcal{R}$  definita così:

$(a, b) \mathcal{R} (c, d)$  se  $ad = bc$ . Si verifica facilmente che  $\mathcal{R}$  è una relazione di equivalenza perché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Essa induce nell'insieme delle coppie di interi una *partizione* di esse in classi di equivalenza, i cui elementi sono le coppie che stanno fra di loro secondo la relazione di equivalenza. Le classi di equivalenza formano un insieme quoziente che viene denominato con la lettera  $\mathbb{Q}$ . Gli elementi di  $\mathbb{Q}$  si chiamano numeri razionali. Quindi, si dice "**numero razionale**"  $\frac{a}{b}$  la classe di equivalenza cui appartiene la coppia  $(a, b)$ . Si ha così per esempio:

$$\frac{2}{3} = \{(2, 3), (-2, -3), (4, 6), \dots\}$$

2. Le frazioni possono essere introdotte come **operatori** per potere dividere in parti uguali una quantità. In questo caso si dice che ciascuna delle parti uguali in cui una certa quantità è stata divisa si chiama **unità frazionaria**.

Così, considerare i  $\frac{2}{3}$  di 18 significa dividere 18 in 3 parti uguali, e poi considerare 2 di queste parti, per cui:

$$\frac{2}{3} \text{ di } 18 = 18 : 3 \cdot 2 = 12.$$

Ebbene, una frazione è equivalente, cioè esprime la stessa parte di una certa quantità, a infinite altre frazioni. Per esempio, sono equivalenti le infinite frazioni

$$\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{10}, \frac{18}{12}, \frac{21}{14}, \frac{24}{16}, \frac{27}{18} \dots\dots$$

Ciascuna delle infinite frazioni equivalenti considerate è "una "rappresentante" di una "entità" astratta chiamata **"numero razionale"**.

Considerando, oltre alle frazioni positive, anche quelle negative e lo 0, si ha l'insieme dei razionali (dal latino *ratio*, cioè rapporto tra interi).

Quindi, l'insieme di tutti i numeri razionali, sia positivi che negativi, si indica con il simbolo  $\mathbb{Q}$ , dove la  $\mathbb{Q}$  proviene dall'inglese "*quotient*" = *quoziente*. Quando si vogliono considerare solo i numeri razionali positivi, allora si usa il simbolo  $\mathbb{Q}^+$ .

**Così come il concetto di "numero razionale" è stato introdotto a partire da quello di "numero naturale", nello stesso modo le operazioni fra numeri razionali vengono definite utilizzando le operazioni già precedentemente definite sull'insieme  $\mathbb{N}$ ; lo stesso dicasi per il criterio di confronto fra due razionali.**

I numeri razionali rappresentabili con frazioni del tipo  $\frac{a}{1}$  vengono identificati con i corrispondenti numeri interi  $a$ , per cui l'insieme  $\mathbb{Z}$  viene ad essere un sottoinsieme di  $\mathbb{Q}$ .

### 8.1 Confronto in $\mathbb{Q}$

- **Dati due numeri razionali  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{p}{q}$ , entrambi positivi,  $a > b$  se e solo se  $mq > np$ .**
- **Dati due numeri razionali  $a = \frac{m}{n}$  e  $b = \frac{p}{q}$ , entrambi negativi,  $a > b$  se e solo se  $|mq| < |np|$ .**

Si può dimostrare che la definizione è corretta, cioè che l'esito del confronto non dipende dalle particolari due frazioni che si sono scelte per rappresentare  $a$  e  $b$ .

- Nel caso di  $\frac{a}{b}$  positivo e  $\frac{c}{d}$  negativo, sarà sempre  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ .

In  $\mathbb{Q}$  si definiscono le seguenti operazioni:

### 8.2 Addizione

La somma di due numeri razionali  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  viene definita mediante la formula:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

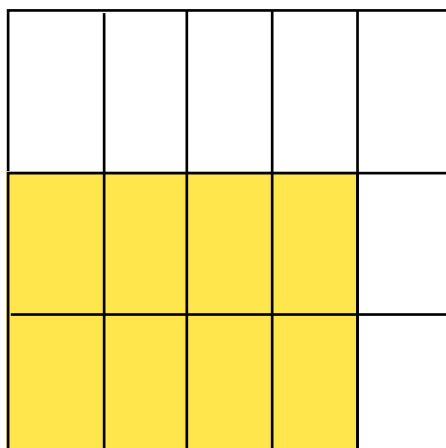
### 8.3 Moltiplicazione

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Esempio

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Geometricamente, partendo da un quadrato unitario, il prodotto rappresenta la misura dell'area del rettangolo i cui lati misurano rispettivamente  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{4}{5}$  del lato del quadrato assunto come unità di misura.



### 8.3 Sottrazione

La sottrazione viene definita come operazione inversa dell'addizione.

### 8.4 Divisione

La divisione viene definita come operazione inversa della moltiplicazione, esattamente come viene fatto nell'ambito dell'insieme  $\mathbb{N}$  dei naturali.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

**La divisione per 0 non ha senso.**

### 8.5 Potenza

L'elevamento a potenza può essere esteso al caso dei numeri razionali diversi da zero con esponenti interi qualsiasi, anche nulli o interi negativi, ponendo:

$$q^0 = 1 \qquad q^{-k} = \frac{1}{q^k}$$

**Continuano a valere le proprietà formali delle potenze.**

## 9. Proporzionalità diretta e inversa

In molti problemi di carattere “concreto” o geometrico entrano in gioco alcune relazioni particolari tra le grandezze interessate che, a seconda dei casi, si dicono **direttamente proporzionali** o **inversamente proporzionali**.

**Due grandezze si dicono direttamente proporzionali quando il loro rapporto, al variare di entrambe, si mantiene costante, cioè, ha sempre lo stesso valore.**

Se indichiamo le grandezze in gioco con  $x$  e  $y$ , allora esse sono direttamente proporzionali quando

$$\frac{y}{x} = k \qquad \text{o} \qquad y = k x$$



Sono esempi di grandezze direttamente proporzionali:

- **il lato di un quadrato e il perimetro di quel quadrato;**
- **la quantità di farina e la quantità di pane ricavata da quella farina;**

**Due grandezze si dicono inversamente proporzionali quando, al variare di entrambe, il loro prodotto si mantiene costante.**

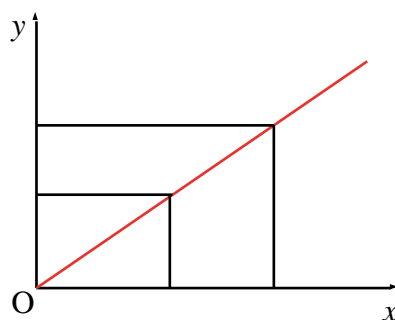
In questo caso si ha

$$x \cdot y = k \quad \text{o} \quad y = \frac{k}{x}$$

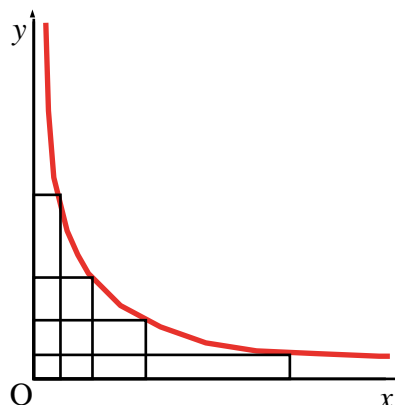
Sono esempi di grandezze inversamente proporzionali:

- **la portata di un rubinetto e il tempo impiegato per riempire la vasca;**
- **la velocità di un corpo in movimento, e il tempo impiegato a percorrere un dato spazio.**

Graficamente, due grandezze direttamente proporzionali si rappresentano con una semiretta uscente dall'origine di un sistema di assi cartesiani:



Graficamente, due grandezze inversamente proporzionali si rappresentano con un ramo di iperbole equilatera:



Le nozioni di proporzionalità diretta o inversa vengono applicati in alcuni tipi di problemi detti del tre semplice diretto o inverso, del tre composto, di ripartizione semplice diretta o inversa e composta e nei calcoli di percentuale.

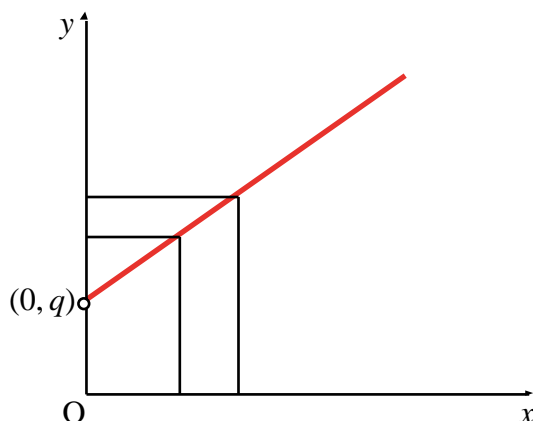
### La funzione lineare

**Due grandezze variabili  $x$  e  $y$  possono essere legate, oltre che da una legge di proporzionalità diretta o inversa anche da una relazione del tipo  $y = kx + q$ , con  $k$  e  $q$  costanti. In tal caso si dice che  $y$  è una *funzione lineare di  $x$* .**

Esempi:

$$y = 3x + 2$$
$$y = 5x - 3$$

Una funzione lineare sarà rappresentata da una retta che interseca l'asse  $y$  in un punto la cui ordinata è uguale al termine  $q$ .



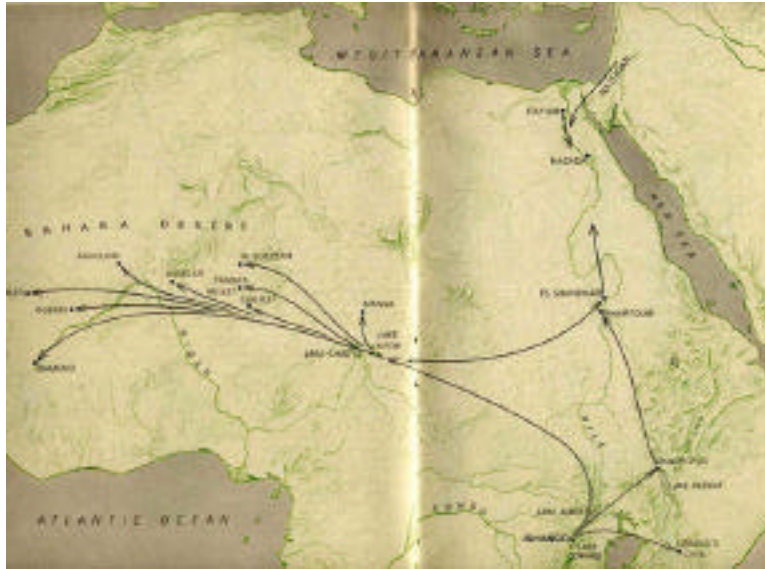
Quando tra le due grandezze  $x$  e  $y$  vi è una relazione di tipo lineare allora il rapporto tra le differenze di due valori di  $y$  e i corrispondenti valori di  $x$  è costante ed è uguale al coefficiente  $k$  della  $x$ . Il valore  $k$  viene detto **coefficiente angolare** della retta e determina l'angolo formato dalla retta con l'asse  $x$ .



## APPENDICE A

### Alcune domande

#### 1) Da quanto tempo l'Uomo sa contare?



Il Lago Edoardo è una delle sorgenti più lontane del Nilo, e si trova sulle alture montuose dell'Africa centro equatoriale ai confini con l'Uganda e lo Zaire, è lungo circa ottanta chilometri e largo cinquanta. Gli scavi archeologici a Ishango hanno portato alla luce l'impugnatura di un attrezzo in osso che ora si trova al Museo Nazionale di Bruxelles.

Sull'osso vi sono tre righe di segni:

*Riga a:*  $9 + 19 + 21 + 11 = 60$

*Riga b:*  $19 + 17 + 13 + 11 = 60$

$$9 = 10 - 1$$

$$11 = 10 + 1$$

$$21 = 20 + 1$$

$$19 = 20 - 1$$

*Riga c:* sottogruppi (5, 5, 10) - (8, 4) - (6, 3)

Conoscenza del concetto di duplicazione

### Varie ipotesi

- **De Heinzelin** (archeologo, 1962) scrisse:

“l’osso può rappresentare un gioco aritmetico particolare, ideato da una popolazione che aveva un sistema numerico in base 10 e aveva anche una conoscenza della duplicazione e dei numeri primi.”

- **possibilità di trasmissione** del sistema numerico ishango (punte per le fiocine) e influenza sull’evoluzione del sistema numerico egiziano.
- **ipotesi astronomica:** registrazione delle diverse fasi lunari, perché le serie di incisioni combaciano con il numero dei giorni compresi tra fasi lunari successive. Attività come la raccolta di bacche e la conservazione di noci e semi, o la caccia, la cui importanza nell’economia degli ishango è testimoniata da prove archeologiche, potrebbero essere raggruppate in successione nel calendario lunare raffigurato sull’osso ishango. Su di esso potrebbero essere registrati anche rituali religiosi associati alle stagioni e altre festività. Quest’ipotesi è compatibile con la nostra conoscenza di popolazioni contemporanee che, cacciando e raccogliendo frutti spontanei, seguono ancora oggi lo stile di vita di cacciatori e raccoglitori che era proprio degli ishango. (Gheverghese)

## 2) Vi sono altri reperti più antichi?

*Uno dei più antichi reperti che ci sono rimasti è costituito da un osso, la tibia di un giovane lupo, con 55 tacche, trovato nel 1937 a Vestonice (Cecoslovacchia centrale), che risale a 40000 anni fa. Le cinquantacinque tacche sono disposte a gruppi di cinque. Le prime venticinque sono seguite da un'intaccatura lunga il doppio delle altre. In questo reperto sono dunque presenti i due concetti fondamentali di un sistema di numerazione: la corrispondenza biunivoca tra la rappresentazione usata (insieme delle tacche) e l'insieme di oggetti a cui si riferisce e inoltre il concetto di base per un sistema di numerazione.*

Al 35 000 a. C. risale una piccola sezione di fibula di babbuino con 29 tacche ben visibili, scoperta durante alcuni scavi in una caverna sulle montagne Lelembo, in Africa meridionale al confine con lo Swaziland.

## APPENDICE B

### Il nostro sistema di numerazione

E veniamo al nostro modo di contare e scrivere i numeri. Che origine ha? Quando compare e a cosa si deve la sua fortuna e il fatto che prenda il sopravvento sui precedenti?

Il nostro sistema di numerazione si diffonde in Europa a partire dal XIII secolo. Fino ad allora si utilizzavano i numeri romani e ci si aiutava con degli strumenti, detti *abachi*, nell'esecuzione dei calcoli.

Il nuovo sistema giunge a noi dagli arabi che a loro volta lo avevano appreso dagli indiani. Per questo viene indicato come *sistema indo-arabico*.

#### **Andiamo a ricercarne le origini.**

1) Nel mondo arabo uno dei primi riferimenti al sistema indiano si registra verso il 650 d.C. quando un vescovo siriano, Severus Sebock, accenna in un suo scritto ai nove segni degli Indiani con cui si riesce a scrivere ogni numero.

2) Nel 772 il califfo Al-Mansur riceve una delegazione di astronomi e studiosi indiani che gli portano in dono un'opera denotata dagli arabi come *Sindhind* opera astronomica in cui si mostra anche come usando solo nove segni sia possibile scrivere qualunque numero ed eseguire facilmente calcoli. Pochi anni più tardi l'opera viene tradotta in arabo, ma tale versione è andata perduta.

3) A questa opera attinse probabilmente lo scienziato al-Khuwarizmi, autore - oltre che di numerose opere di astronomia e trattati sull'astrolabio - anche di due opere di aritmetica e di algebra. La prima, scritta attorno all'850 d. C., ci è pervenuta solo in traduzione latina col titolo *De numero indorum*. Qui al-Khuwarizmi dà una esposizione chiara e completa del sistema di numerazione indiano tanto che nelle successive traduzioni latine che si diffusero in Europa il sistema di numerazione indiano e degli *algoritmi* per eseguire con essi le varie operazioni. Non tutti sanno che la parola *algoritmo* non è nient'altro che la

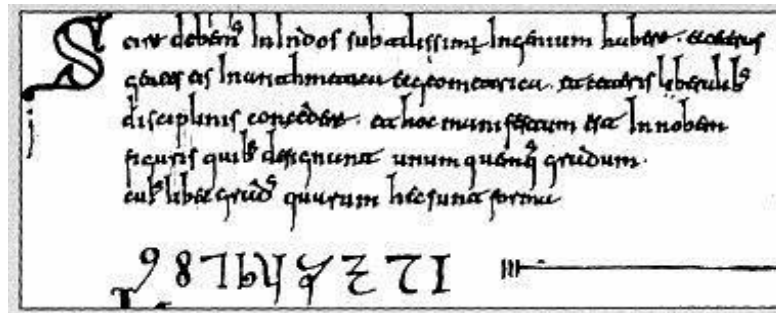
deformazione del nome di al-Khuwarismi. Il nuovo calcolo che egli descrive venne talvolta infatti attribuito a lui stesso e il procedimento per eseguire le operazioni aritmetiche rimase legato al suo nome deformato in *algorismo* o *algoritmo*.

4) Il testo arabo originale più antico per ora rinvenuto in cui si illustra il sistema indiano è l'*Aritmetica* di al-Uqlidisi, il *Kitab al Fusul Fi al-Hisab al-Hindi*, di cui esiste un manoscritto conservato ad Istanbul datato 341, che corrisponde al 952 d.C. Dall'introduzione apprendiamo che l'uso indiano era quello di scrivere i numeri ed eseguire i conti su delle lavagnette su cui era disteso uno strato di sabbia, ma l'autore avverte che la stessa cosa si può fare usando fogli ed inchiostro. Il testo è diviso in quattro libri nel primo dei quali, in ventuno capitoli, si introducono il sistema indiano e le operazioni con interi e frazioni fino all'estrazione di radici. Il primo capitolo si apre con la descrizione di quello che cosa un principiante deve imparare: prima di tutto i nove (e non dieci!) simboli, che si presentano come una delle varianti arabe dei simboli da cui prenderanno la forma definitiva le nostre cifre; successivamente i posti: unità decine e centinaia da ripetersi in gruppi di tre; poi si deve familiarizzare con i numeri formati da quattro cifre, costruendo il 2222 e altri esempi; può accadere che uno dei posti sia "vuoto": in questo posto si mette un cerchio che viene detto *sifr* e può trovarsi nel primo, nell'ultimo o in un posto intermedio.

L'autore ci avverte di aver composto il libro dopo aver studiato e raccolto i vari metodi di cui era venuto a conoscenza. La matematica indiana fu successivamente studiata a fondo dal più noto scienziato al-Biruni che trascorse un certo periodo nell'India del nord attorno al 1020 interessandosi a tutta la cultura indiana: tradusse dal sanscrito numerosi testi di letteratura e scrisse varie opere sugli usi, la cultura e la scienza del luogo.

5) Nel X-XI secolo i sistemi fondamentali di numerazione usati in testi di scienziati arabi erano tre: un sistema prevedeva la scrittura in parole per esteso del numero e derivava dalle pratiche di conteggio con le dita (*indigitazione*) usate soprattutto dalla comunità dei commercianti e contabili, ma che è utilizzato anche ad esempio dallo scienziato Abu al-Wafa; un secondo sistema era il sistema sessagesimale derivato da quello babilonese che prevedeva come simboli l'uso di lettere dell'alfabeto arabo

ed era usato prevalentemente nelle opere di astronomia; infine il terzo era il sistema di numerazione indiano, la cui diffusione si andava estendendo sempre più soprattutto nella parte occidentale, divenendo il modo usuale di scrivere e calcolare per scienziati e non.



**La più antica indicazione delle nostre cifre trovata in Europa**

6) Mentre tracce solo sporadiche iniziano a fare la loro comparsa anche in Europa, è solo più tardi il sistema indo-arabico inizia ad essere davvero conosciuto ed usato. E ciò avvenne a partire dal XIII secolo.

Il contributo fondamentale in questo senso è costituito dall'opera del pisano Leonardo Fibonacci intitolata **Liber abaci**, del 1202. Fuori d'Italia opere analoghe furono ad esempio quelle composte da Alessandro di Villedieu, il *Carmen de algorismus*, e da Giovanni di Halifax, noto come Sacrobosco, l'*Algorismus vulgaris*.



L'evoluzione dei numeri indo-arabi: dal mille d.C. (in alto)  
all'Italia del 1400  
(ultima serie in basso).

Ora, nel nostro sistema decimale, dieci unità del primo ordine formano una decina, che costituisce una unità del secondo ordine; 10 unità del secondo ordine formano un centinaio, che costituisce una unità del terzo ordine, ecc. Per cui abbiamo:  $1=10^0$ ,  $10=10^1$ ,  $100=10^2$ ,  $1000=10^3$ ...

Così, ad es.:  $298 = 8$  unità del primo ordine,  $9$  unità (decine) del secondo ordine,  $2$  unità (centinaia) del terzo ordine.  $298$  si può anche scrivere così:  $2 \times 100 + 9 \times 10 + 8 \times 1 = 2 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 8 \times 10^0$ .

### Altri sistemi di numerazione

Si poteva però scegliere un sistema di numerazione a base 5, cioè da 0 a 4, e le cose dal punto di vista logico non sarebbero cambiate. Per rappresentare 298 si sarebbe dovuto fare così:  $298:5=(59 \text{ con resto } 3)$ ,  $59:5=(11 \text{ con resto } 4)$ ,  $11:5=(2 \text{ con resto } 1)$ . Cioè occorre dividere per 5 finché non si ottengono dei numeri inferiori a 5. In questo caso 298 scritto in base 10, è rappresentato in base 5 col numero 2143, cioè:  $3 =$  unità del primo ordine,  $4 =$  unità del secondo ordine,  $1 =$  unità del terzo ordine,  $2 =$  unità del quarto ordine.

Per poter risalire da una numerazione a base arbitraria a una decimale è semplice. Per esempio,  $(2143)_5 = 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$  (nel sistema a base 5 ogni unità di un dato ordine è uguale a 5 unità dell'ordine subito inferiore)  $= (298)_{10}$ .

Naturalmente si potevano scegliere sistemi di numerazione a base 3, 7, 9 ecc. Tuttavia, il sistema che si è preferito adottare nel calcolo computeristico è stato quello **binario**, cioè a base 2, composto da 0 e 1. E' stata scelta questa soluzione perché in un circuito elettrico possono trovarsi solo due stati: acceso e spento, cioè appunto 1 o 0.

Le espressioni, essendoci un numero minimo di simboli, richiederebbero un tempo molto lungo di elaborazione, poiché si

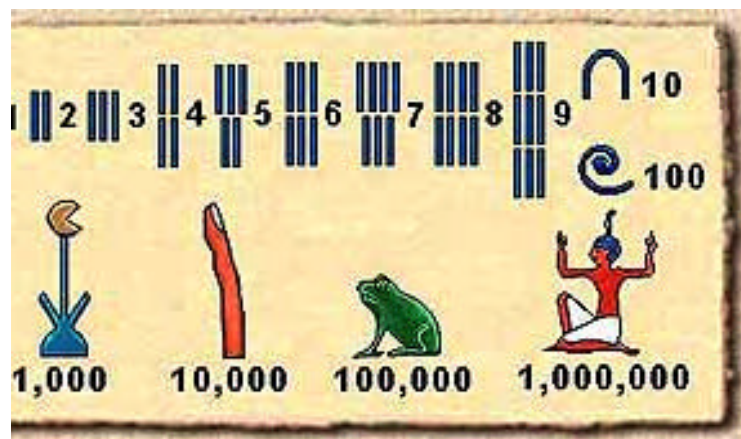


vengono a creare lunghe file di 0 e di 1, ma l'enorme velocità del computer ha saputo risolvere anche questo problema.

Il suddetto numero 298 trova il suo equivalente, a base 2, nella cifra 100101010.

| Esadecimale | Binario |
|-------------|---------|
| 0           | 0000    |
| 1           | 0001    |
| 2           | 0010    |
| 3           | 0011    |
| 4           | 0100    |
| 5           | 0101    |
| 6           | 0110    |
| 7           | 0111    |
| 8           | 1000    |
| 9           | 1001    |
| A           | 1010    |
| B           | 1011    |
| C           | 1100    |
| D           | 1101    |
| E           | 1110    |
| F           | 1111    |

Di un certo interesse era anche il **sistema vigesimale** degli antichi Maya. Come base dei loro calcoli avevano preso il numero 20, cioè la somma delle dita delle mani e dei piedi. La conchiglia era il simbolo dello zero; il punto equivaleva a uno; ecc. Questo sistema di numerazione, che era **posizionale** e non **additivo** (come quello romano), permetteva di calcolare somme molto grandi.



Come sistema, il loro era certamente migliore di quello egiziano e greco-romano. Ecco, per esempio, come venivano rappresentati i numeri dagli egiziani:

I primi spagnoli rimasero impressionati dalla rapidità con cui i Maya contavano, senza misure di capacità o peso, i semi di cacao, che vendevano uno ad uno in quantità varianti da 400 a 8.000.

A proposito degli Egiziani, il loro modo di rappresentare le frazioni fu unico in tutta la storia della matematica, tanto che esse sono state chiamate “**frazioni egizie**”. Qual era la loro caratteristica?

Erano quelle che noi chiameremmo frazioni unitarie, cioè di tipo  $1/n$  con  $n$  intero positivo, a cui si aggiunge la frazione particolare  $2/3$ . Nella scrittura geroglifica le frazioni unitarie venivano rappresentate ponendo sopra il numero che per noi è il denominatore, cioè quello che indica in quante parti si deve dividere, il simbolo della bocca, simbolo che sembra legato al problema della spartizione del cibo. Per la frazione  $1/2$  e la frazione  $2/3$  si usavano simboli speciali.

Nella scrittura ieratica il simbolo della bocca è sostituito da un semplice punto ed aumenta il numero delle frazioni per cui si ricorre a simboli speciali:  $1/3$ ,  $1/4$  e  $1/6$  oltre a  $1/2$  e  $2/3$ .

Il concetto generale di frazione sembra sia rimasto estraneo agli egizi. Una frazione che noi scriveremmo come  $p/q$  (con  $p$  e  $q$  interi positivi), e che poteva venir fuori nel corso di problemi o procedimenti, veniva espressa come somma di un intero e di frazioni unitarie. Ad esempio nel papiro di Rhind  $19/8$  è scritto come  $2+1/4+1/8$ .

Non è chiaro secondo quali criteri si sceglieva una scomposizione piuttosto che un'altra. Nel *Papiro Rhind* si trova una tabella che dà le scomposizioni delle frazioni del tipo  $2/n$  con  $n$  dispari da 5 a 101 chiedendo: “quale parte di  $n$  è 2?”. Le scomposizioni, fornite senza spiegazione, hanno alcune caratteristiche comuni: non compaiono mai termini ripetuti, quindi ad esempio  $2/7$  non è  $1/7 + 1/7$  ma  $1/4 + 1/28$ , i denominatori sono in ordine crescente, i termini sono al massimo quattro e in generale nel numero minimo possibile rispettando la prima condizione. Altrove anche la frazione  $2/3$  è ammessa come fondamentale nelle scomposizioni.

Così, il famoso *Papiro Rhind* (o di *Ahmes*, dal nome dello scriba che ne fu l'autore) risalente all'incirca al 1650 a.C. e scritto in caratteri *ieratici*, e copiato da un papiro di epoca precedente, contiene all'inizio due tabelle in cui vengono scomposte in frazioni *unitarie*, cioè, aventi l'unità come numeratore, frazioni del tipo

$$\frac{2}{n} \quad \text{e} \quad \frac{n}{10}$$

dopodiché vengono risolti ottantaquattro problemi di vario tipo. L'uso delle frazioni unitarie fu il tratto caratteristico dell'aritmetica egiziana. Benché gli Egiziani avessero un segno speciale per le frazioni  $1/2$ ,  $2/3$  e  $3/4$ :

$$\frac{1}{2} = \text{◁} \quad \frac{2}{3} = \text{⊕} \quad \frac{3}{4} = \text{◐}$$

le frazioni che non potevano essere espresse mediante una singola frazione unitaria venivano scritte come somma di frazioni unitarie.

## SISTEMI ADDIZIONALI

Un sistema addizionale era quello usato dai Romani. Esso si basava su sette simboli:

$$\mathbf{I = 1} \quad \mathbf{X = 10} \quad \mathbf{C = 100} \quad \mathbf{M = 1000}$$

$$\mathbf{V = 5} \quad \mathbf{L = 50} \quad \mathbf{D = 500}$$

Il sistema è addizionale perché i Romani, per esempio, indicavano il numero 20 come XX, cioè, come  $10 + 10$ . Il simbolo X assume lo stesso significato indipendentemente dalla posizione occupata. Si intende implicitamente che tra le due X ci sia una addizione.

Per scrivere tutti gli altri numeri valevano le seguenti regole:

- **Una cifra di valore minore posta alla destra di una di valore maggiore si sommava a quest'ultima:**

$$\text{VII} = 5 + 1 + 1 = 7$$

$$\text{LXV} = 50 + 10 + 5 = 65$$

- **Solo le cifre L, X, C, M si potevano ripetere una accanto all'altra per non più di tre volte:**

$$\text{CCCV} = 100 + 100 + 100 + 5 = 305$$

$$\text{MMDXXX} = 1000 + 1000 + 500 + 10 + 10 + 10 = 2530$$

- **Una cifra di valore minore posta alla sinistra di una di valore maggiore si sottraeva da questa, tenendo presente che**
- **la cifra I si poteva sottrarre solo da V e da X;**
- **la cifra X si poteva sottrarre solo da L e C;**
- **la cifra C si poteva sottrarre solo da D e M;**
- **le cifre V, L e D non si sottraevano da nessuna cifra:**

$$\text{IV} = 5 - 1 = 4$$

$$\text{CM} = 1000 - 100 = 900$$

$$\text{XCV} = 100 - 10 + 5 = 95$$

- **Una lineetta sopra un numero indicava un valore mille volte maggiore del numero stesso:**

|                               |                     |
|-------------------------------|---------------------|
| $\bar{\text{L}} = 50$         | $1000 = 50.000$     |
| $\overline{\text{XXXV}} = 35$ | $1000 = 35.000$     |
| $\bar{\text{XV}} = 10$        | $1000 + 5 = 10.005$ |

Un altro esempio di sistema di numerazione additivo era quello dei Greci. Nella civiltà greca classica sono noti due principali sistemi di numerazione. Il primo, più antico, è noto come *attico* ed è per molti aspetti simile a quello in uso presso i Romani; faceva infatti uso accanto ai simboli fondamentali per l'1 e le potenze di 10 fino a 10000, di un simbolo speciale per il 5, che combinato con i precedenti, dava altri simboli anche per 50, 500, 5000, 50000. Compiono testimonianze di questo sistema a partire dal V secolo al I secolo a.C., ma a partire dal III secolo a.C. l'altro sistema, detto *ionico* o *alfabetico*, aveva preso il definitivo sopravvento. Questa notazione si serve di ventisette simboli alfabetici (alcuni dei quali arcaici e non più usati nella Grecia classica) per indicare le unità da 1 a 9, le decine da 10 a 90, le centinaia da 100 a 900.

Si usavano poi nuovamente le prime nove lettere precedute da un apice in basso per indicare i multipli di 1000, e per esprimere numeri ancora più grandi si ricorreva al simbolo (iniziale di

miriade) che indicava di moltiplicare per 10000 il numero che seguiva.

## SISTEMI POSIZIONALI

In questi sistemi la quantità che esprime il simbolo dipende anche dalla posizione occupata dal simbolo.

Ad esempio 707, utilizza due volte il simbolo 7, ma il primo 7 indica le unità, quello a sinistra indica le centinaia.

In questo periodo viene introdotto il simbolo zero (0), il termine zero deriva dal sanscrito *sumpa*, tradotto in arabo *sifr* poi *afra* e nella traduzione latina *zephirum* ed infine **zero**.

Per esempio, i Babilonesi usavano un sistema posizionale a base 60, ereditato in parte da quello dei Sumeri, con la differenza che quest'ultimo era additivo, cioè i numeri venivano scritti disponendo uno accanto all'altro i simboli fondamentali occorrenti.

Alla civiltà dei Sumeri appartengono varie tavolette che contengono i più antichi segni numerali usati dall'uomo e risalgono al 3500-3000 a.C.

|    |                     |    |                       |    |                         |    |                           |    |                             |    |                             |
|----|---------------------|----|-----------------------|----|-------------------------|----|---------------------------|----|-----------------------------|----|-----------------------------|
| 1  | ∩                   | 11 | ∩ ∩                   | 21 | ∩ ∩ ∩                   | 31 | ∩ ∩ ∩ ∩                   | 41 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩                   | 51 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩                 |
| 2  | ∩ ∩                 | 12 | ∩ ∩ ∩                 | 22 | ∩ ∩ ∩ ∩                 | 32 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩                 | 42 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩                 | 52 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩               |
| 3  | ∩ ∩ ∩               | 13 | ∩ ∩ ∩ ∩               | 23 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩               | 33 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩               | 43 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩               | 53 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩             |
| 4  | ∩ ∩ ∩ ∩             | 14 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩             | 24 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩             | 34 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩             | 44 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩             | 54 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩           |
| 5  | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩           | 15 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩           | 25 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩           | 35 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩           | 45 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩           | 55 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩         |
| 6  | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩         | 16 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩         | 26 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩         | 36 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩         | 46 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩         | 56 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩       |
| 7  | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩       | 17 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩       | 27 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩       | 37 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩       | 47 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩       | 57 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩     |
| 8  | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩     | 18 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩     | 28 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩     | 38 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩     | 48 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩     | 58 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩   |
| 9  | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩   | 19 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩   | 29 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩   | 39 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩   | 49 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩   | 59 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ |
| 10 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ | 20 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ | 30 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ | 40 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ | 50 | ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ ∩ |    |                             |

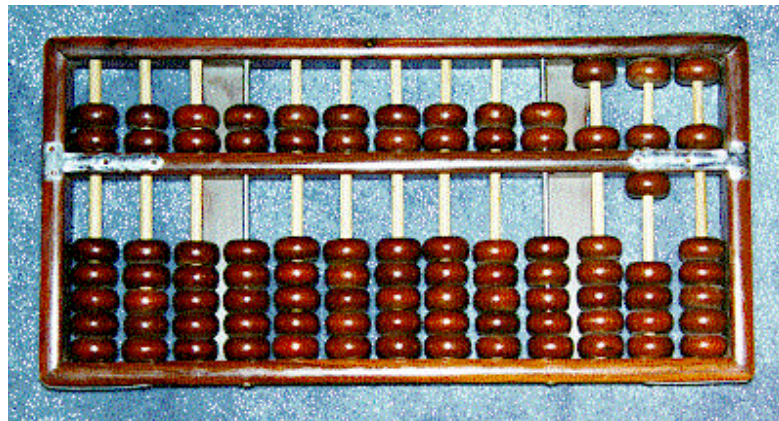
I simboli fondamentali usati nella numerazione sumera corrispondono ai numeri 1, 10, 60, 600, 3600, 36000, e la numerazione è additiva, con un ruolo speciale spetta, accanto al 10, del numero 60. Questa caratteristica viene ereditata dal

sistema babilonese. Qui si usa la scrittura cuneiforme: con due simboli fondamentali, un cuneo verticale per le unità e una parentesi uncinata per le decine, si rappresentavano i numeri da 1 a 59. Per i numeri successivi troviamo qui la prima testimonianza dell'uso di una notazione posizionale.

### *I simboli babilonesi*

Non si introducevano infatti altri simboli, ma si affiancavano gruppi di cunei come i precedenti per indicare le successive potenze del 60. Si tratta dunque di un sistema di numerazione posizionale a base 60. Il sistema di spaziatura consentiva spesso di risolvere le ambiguità di interpretazione dei raggruppamenti e delle eventuali colonne vuote. Ai tempi di **Alessandro Magno** era però invalso anche l'uso di un simbolo (due cunei obliqui) **per indicare un posto vuoto**; questo simbolo svolgeva alcune funzioni del nostro zero, ma non tutte: veniva usato fra colonne e mai per indicare colonne vuote alla fine della sequenza; rimaneva dunque alla deduzione del contesto l'interpretazione finale del numero.

### **Abacisti contro algoritmisti**



Durante l'Alto Medioevo nell'Occidente cristiano le operazioni si effettuavano con gli abachi. L'abaco era originariamente una tavola con delle scanalature a colonna nelle quali si collocavano i gettoni su cui erano scritte le cifre. Poi con il tempo alle scanalature vennero sostituite delle colonnine di legno o di metallo in cui erano impilati dei gettoni o piccole sfere per rappresentare i numeri.

Nell'opera *Carmen de Algorismo*, lo “zero” venne considerato come una cifra per la prima volta in Occidente. Un abacista, Raoul de Laon, ebbe l'idea di introdurre un nuovo carattere, detto *sipos*, “gettone” da



collocare nelle colonne vuote. Quel gettone, sostituito dal segno “zero” vanificò in seguito la funzione delle colonne dell'abaco. L'introduzione della numerazione posizionale importata dal mondo arabo incontrò una resistenza aspra da parte degli abacisti, i quali detenevano il segreto del calcolo, e costituivano una specie di corporazione, che aveva anche interessi comuni con la Chiesa.

## Appendice C

**Una riflessione filosofica di Giovanni Piana** (già ordinario di Filosofia Teoretica presso il Dipartimento di Filosofia (Facoltà di Lettere e Filosofia) dell'Università degli Studi di Milano).

[http://www.lettere.unimi.it/Spazio\\_Filosofico/dodeca/piana/coperti.htm](http://www.lettere.unimi.it/Spazio_Filosofico/dodeca/piana/coperti.htm)

Il numero come *quanto del molto* ovvero il numero che presuppone l'idea della molteplicità come pluralità, e che noi abbiamo voluto chiamare anche numero-di-oggetti, è naturalmente ciò che comunemente si indica con il termine di *numero cardinale*. Nessuna caratterizzazione della cardinalità

potrebbe fare a meno di richiamarsi ad una molteplicità in genere.

Nello stesso tempo non appena parliamo di cardinalità viene subito richiamata alla mente la nozione di ordinalità e di numero ordinale, sulla quale vogliamo ora spostare la nostra attenzione. |

La grammatica della lingua italiana provvede a stabilire anche sul piano linguistico questa differenza proponendo degli specifici “numerali ordinali”. Si tratta, come si sa, delle parole “primo, secondo, terzo, quarto, ecc.”. Queste espressioni verranno impiegate quando ci troviamo alla presenza di una *molteplicità ordinata* e siamo interessati alla *posizione* che un certo elemento occupa in essa.

Un buon esempio di molteplicità ordinata sono le lettere del nostro alfabeto. Esse ci vengono insegnate esattamente secondo un certo ordine che comincia con la A e finisce con la Z, anche se quest’ordine non ha nessuna necessità interna. Cosicché ha perfettamente senso chiedere in quale posizione esattamente si trovi la lettera M - domanda a cui la lingua italiana ci raccomanda di rispondere con un numero ordinale. Di passaggio non è forse inutile osservare che se nella lingua italiana non esistessero affatto dei numerali ordinali, la distinzione concettuale non per questo verrebbe meno e saremmo tenuti a metterla in evidenza.

Potremmo allora dire che il numero ordinale è un tipo di numero che risponde alla domanda: “In quale posizione?” Anch’esso può allora essere caratterizzato come *numero-di...* e precisamente come *numero-di-posizione*.

La differenza tra cardinale e ordinale è per certi versi ovvia, e tuttavia, non appena ci si pensa un po’ sopra, questa ovvietà tende ad attenuarsi. La differenza inizialmente chiara sta in questo: un conto è determinare *il numero degli elementi di un insieme* (parola che usiamo qui nello stesso senso di molteplicità o di pluralità) ed un altro è determinare la *posizione che un singolo elemento ha nell’insieme*.

Nel primo caso potremmo dire che l’ordine è del tutto indifferente, sia che esso ci sia o non ci sia. Le lettere



dell'alfabeto restano ventuno sia che la recitazione dell'alfabeto cominci dalla A o dalla Z oppure che l'alfabeto venga scritto su tessere sparpagliate su un tavolo da leggere in un modo qualunque. Per qualunque ordine, il risultato del conteggio non cambia. Vedremo in seguito se il contare sia da riferire essenzialmente alla cardinalità - come saremmo forse indotti a pensare badando non tanto allo svolgimento dell'operazione di conteggio, quanto al suo risultato - oppure se il problema abbia un grado maggiore di complessità e debba essere affrontato in altro modo. |

Nel caso del numero ordinale invece *non siamo interessati a determinare il numero totale degli elementi dell'insieme, ma la posizione di un singolo elemento in esso.*

Di fronte a queste differenze occorre però proporre una precisa relazione: se determiniamo la posizione dell'*ultimo* elemento di un insieme ordinato abbiamo determinato anche quanti sono gli elementi dell'insieme. Se sappiamo che la Z si trova al ventunesimo posto e che essa è l'ultima lettera sappiamo anche che vi sono 21 lettere dell'alfabeto. Naturalmente il numero di posizione della lettera M è anche il numero di lettere della molteplicità delle lettere comprese tra A e M. |

Alla luce di questa constatazione, cardinalità e ordinalità ci appaiono ora assai meno nettamente differenziate di quanto potesse sembrare dalle considerazioni precedenti; e non vi sarebbe da meravigliarsi se sorgessero, pur a partire da determinazioni così semplici e chiare, nodi particolarmente difficili da dipanare proprio per ciò che riguarda il modo in cui esse si trovano in rapporto.

Nella teoria del numero si è molto discusso, ad esempio, *su quale fosse la nozione primaria del numero*, se la nozione cardinale o quella ordinale, e spesso si è pensato che, proprio per il fatto che l'ordine presuppone qualcosa da ordinare, si dovesse prendere le mosse da una nozione generale di molteplicità, e quindi da una nozione di molteplicità indifferente all'ordine. Una sorta di priorità spetterebbe così alla nozione di numero cardinale. Ma vi sono anche autorevoli teorie opposte. Ciò di cui spesso si sente la mancanza in questo genere di discussioni è un chiarimento preliminare sul senso in cui si parla di primarietà e

il contesto in cui questo problema viene posto. In realtà l'interesse della questione diventa chiaramente visibile all'interno di un punto di vista genetico-costitutivo. L'interrogativo verrebbe così posto anzitutto *sul modo in cui cardinalità e ordinalità intervengono all'interno della formazione del concetto di numero*. In effetti stiamo costruendo il terreno per una ripresa della questione da questo punto di vista.