Discussion Paper

Conference Theme: ***Teaching and learning mathematics: resources and obstacles***

Introduction

Teaching and learning mathematics is a complex system, involving a plurality of factors and components, ranging from the epistemology of the discipline to cognitive psychology, socio-cultural environments, affective elements, and technological devices. At the very core of the system, making sense in doing mathematics is widely considered as a basic requisite for constructing knowledge. In this regard, it is worth analyzing mutual relationships between real objects and mathematical constructions, the role of thinking processes and languages (often related to embodied experiences), and the influence of beliefs and emotions. All factors can be double-faced, i.e., they can provide resources and/or obstacles for the development of mathematical knowledge. In this regard, the professional expertise of the teacher is of crucial importance: in fact the teacher is responsible for being up to date not only about the content aspects of the discipline, but also about those factors that interact (and interfere) with the teaching-learning processes. It is necessary for the mathematics teacher to be aware of these issues, both in designing classroom activities and in managing them with the students.]

The four subthemes (and related questions) we propose in the following are to be considered as a means to promote investigation and facilitate discussion. All the subthemes are closely interrelated: their distinction is purely functional to assist the organization of the working groups during the conference.

Subtheme 1. Mathematical content and curriculum development

The relationship between mathematics as a discipline and the mathematical content to be taught reminds us of the dialectic between theory and practice, which has received increasing emphasis since the 1990s (see, e.g., Brown & Cooney, 1991; Burton, 1991; Godino & Batanero, 1997; Wittmann, 1991). In the search of boundary conditions to mediate knowledge between the two poles, there is evidence that any conception which assigns to "theory" the role of instructing "practice" is doomed to fail and, consequently, there is a growing need for developing interaction between the two poles, and for co-operation between the actors involved in the education system (Bartolini Bussi & Bazzini, 2003).

Since the 1980s, an important contribution in the debate was given by Chevallard, who studied the didactical transposition phenomena, producing elements of knowledge about didactical systems and the content for mathematics teaching. This led to the development of the theory of didactic transposition as well as its practical realization (Chevallard, 1985). This idea has been further developed, in the 1990s and beyond, into a more general study within which mathematics is practised in terms of different praxeologies (combining praxis and logos).

Focusing on the epistemology of mathematics, and noticing persistent students' difficulties related to specific concepts, Brousseau (1997) discussed the notion of *epistemological obstacle* in mathematics. This idea has inspired research in mathematics education, opening the way to the search for other kinds of obstacles, related to didactical and cognitive aspects, as well as critique of the idea of epistemological obstacle, on the basis of historical-cultural discussion (Radford, 1997).

The dialectical interaction between theory and practice grounds the work of curriculum developers, mainly when different actors (researchers, teachers, school managers) are asked to work together. In such cases, curriculum development can be a great opportunity for co-operation and mutual enrichment, and make a positive contribution to the school (Bazzini, 1991). This theme will be also discussed in Subtheme 2 (see below).

The choice of content to be included in the curriculum is an important issue requiring attentive investigation in any context. Along with traditional topics, such as arithmetic, algebra, and geometry, relatively new topics need to be included in the curricula: Probabilistic and stochastic thinking constitute one striking example.

In recent years, most countries have introduced or developed statistical content in primary and secondary mathematics. The reasons are many: taking into account the rise of stochastical power in the discipline of mathematics, the will to develop other teaching approaches based on modelling from real situations, and interdisciplinarity, as a societal demand.

In Higher Education, more and more courses are incorporating statistics at the Bachelor level as in Doctoral programs. At this level, the sectorial variations are multiple (statistics for biology, management, psychology, etc.) with, as noted by Jeanne Fine (2010), in the words of Bourdieu, a high risk of hyperspecialisation and a weakening of the identity of the discipline. The foundations are supposedly acquired during previous schooling, and teaching of statistics is reduced to the presentation by non-specialists implementing techniques using specialized software. The operational dimension of knowledge is privileged at the expense of systematic and historical dimensions (see Fabre 2010), with the risk that students do not master basic statistical concepts, as highlighted in numerous research studies (see, in particular, Batanero et al, 1994; Delmas et al, 2007). The multiple epistemologies, most often not clarified, are a source of difficulty for students who do not identify where the professor or teacher is coming from, epistemologically (Armatte 2010).

It is true that statistics is a discipline whose epistemology is complex. However, it is important that this discipline is taught by specialists in higher education and is integrated into mathematics lessons in secondary school such that it is not diluted in the host disciplines (Gattuso, 2011). But there are many differences with mathematics, differences which must be made explicit in the context of the training of mathematics teachers. In statistics, students should be led to give up their deterministic worldview and to consider the lack of certainty as a feature of reality (Meletiou-Mavrotheris & Lee, 2002). A fundamental difference between statistics and mathematics is that, in statistics, the context has a special status: it is an integral part of the problem. The risk of misunderstanding between teacher and students, linked to the different representations, then becomes greater (Hahn, 2014). In statistics students should jointly master inductive and deductive reasoning (Fine, 2010), and combine the two perspectives: the data-centric approach and the more formal modeling (Armatte, 2010; Peters, 2011). This is not only to master the concepts but also to develop a statistical way of thinking (Gattuso, 2011), integrating the use of technology, which is essential in Statistics (Serrado et al, 2014).

The previous discussion opens the way for contributions to the subtheme 1 of the CIEAEM67 Conference, which focuses on issues related to the epistemological aspects of mathematics relevant to educational aims, and frames them in terms of the obstacle/resource dialectic. Subtheme 1 will focus on the following questions:

- *Which obstacles may interfere with teaching? What is their nature? What could be possible strategies to avoid/overcome them?*
- *Which obstacles interfere with learning? What is their nature? What could be possible strategies to avoid/overcome them?*
- *What are the resources and obstacles in different national curricula?*

- *What professional expertise is needed for developing and implementing curriculum?*
- *Is there any specific content in need of special attention?*
- *Should statistics be introduced in the primary school? How should we think about the preparation of teachers who will teach statistics at each level (primary, secondary, higher education)? What are the differences/complementarities between mathematics and statistics?*

Subtheme 2. Teacher education

Mathematics teacher education has been receiving increasing attention in research over the last decade (Clark-Wilson et al., 2014; Even & Ball (Eds.), 2009; Wood (Ed.), 2008). This 'emerging field' (Adler et al., 2005) has its roots in previous research on classroom teaching-learning processes. With the progressive diffusion of new learning and teaching models since the 1960s, the role of the teacher in the classroom has changed radically. In fact, new approaches to learning also require new approaches to teaching: this change is not spontaneous; on the contrary, in order to take place it needs to be fostered by suitable teacher education initiatives.

Research has pointed out different aspects with respect to mathematics teacher education: from the specificities of the knowledge needed by teachers to affective factors, from the inclusion of new technologies to systemic analyses.

Reflection on the kind of knowledge that characterises the mathematics teacher in his/her professional work has been carried out in the seminal work of Shulman (1986). Ponte et al. (1994) support the idea of blending mathematical content with pedagogical knowledge, drawing on different components of current knowledge to produce a restructuring of the teacher's craft knowledge. This pedagogical content knowledge has a much broader scope than just the representation of the subject matter: it must include "a comprehensive body of images, principles, and rules for action, some general, some more specific, organized with a clear rationale, bearing on the specific nature of the underlying content and powerful enough to guide the action of the teacher" (p. 358). Steinbring (1998) explores a specific component of professional knowledge for mathematics teachers, namely "epistemological knowledge of mathematics in social learning settings (p. 160)". He claims that "teachers surely need mathematical content knowledge and pedagogical knowledge; and, within the domain of pedagogical content knowledge, they also need epistemological knowledge, so that they are able to assess the epistemological constraints of mathematical knowledge in different social settings of teaching, learning, and communicating mathematics. This important component of epistemological knowledge of mathematics in social learning settings is not a systematized, canonical knowledge corpus, which could be taught to future teachers by way of a fixed curriculum. Rather, the epistemological knowledge consists of exemplary knowledge elements, as it refers to case studies of analysis of teaching episodes or of interviews with students, and comprises historical, philosophical, and epistemological conceptual ideas" (p. 160). Ball and Bass (2003) frame the typical features of mathematics that are involved in teaching within the Mathematical Knowledge for Teachers model, identifying the Specialized Content Knowledge as an important sub-domain of mathematical knowledge, strictly connected to the work of teaching. Specialized content knowledge intertwines often with knowledge and competences related to digital technologies, which have also gained increasing relevance in the teacher education context (Bairral & Powell, 2013; Drijvers et al., 2010).

On the other hand, several studies have investigated the social aspects of teacher education programs, especially the involvement of teachers in joint analysis and reflection together with researchers. Within the research literature we find important notions such as *community of practice* (Wenger, 1998) and *communities of inquiry* (Jaworski, 2006); the cornerstone of these studies being the notion of critical reflection, conceived not only as a fundamental attitude to be developed by teachers, but also as a professional responsibility. This idea is strictly interrelated with that of joint collaboration between teachers and researchers, as Krainer (2011) stresses when he suggests looking at researchers as "key stakeholders in practice" and teachers as "key stakeholders in research."

Besides epistemological and social dimensions, the affective dimension comes to play an important role in teacher work and in teacher education as well. It includes studying the influence of teachers' beliefs and emotions on their mathematics teaching. In fact, as Zembylas (2005) underlines:

> teacher knowledge is located in 'the lived lives of teachers, in the values, beliefs, and deep convictions enacted in practice, in the social context that encloses such practices, and in the social relationships that enliven the teaching and learning encounter'. These values, beliefs and emotions come into play as teachers make decisions, act and reflect on the different purposes, methods and meanings of teaching. (p. 467)

This is particularly relevant, especially concerning primary teachers, who are generalist teachers and sometimes have to teach mathematics despite their personal dispositions towards mathematics. Hence, teachers' beliefs and emotions towards mathematics can constitute obstacles to effective teaching practice. The study of the conditions under which this hypothesis is true remains an open problem. On the other hand, personal negative experiences and emotions may also become resources for teachers, as suggested by Coppola et al. (2013), focusing in particular on future teachers.

Finally, mathematics teacher education processes also need to be considered from a systemic point of view, with a focus on the relationships and dynamics between the several "variables" included in such complex processes as: teachers' knowledge and practices, results from research, institutional constraints (national curricula in particular), traditions, cultural aspects, and so on. Considering this complexity, teachers' development can be considered as a meta-didactical transposition process evolving over time (Arzarello et al., 2014).

Starting from this discussion, and from the contributions of the accepted papers, subtheme 2 in CIEAEM67 aims at rethinking the complexity of teacher education in terms of resources and obstacles for teaching and learning mathematics. The following questions may further guide the discussion:

- *How is it possible to support teachers to develop suitable knowledge and competences in digital technologies, so that they are effective in their mathematics teaching?*
- *What are the main obstacles for mathematics teacher development?*
- *How can the social dimension become a resource for teacher education? What are the challenges of programs strongly based on social interaction in communities of practice/enquiry?*
- *How can the affective dimension become a resource for teacher education?*

Subtheme 3. Classroom practices and other learning spaces

Mathematical thinking arises and develops in a complex interplay of languages and representations, through reference to intuitions, metaphors, and analogies, and by making use of various artefacts and tools, which interact with our bodily nature. All these components are crucial for teaching and learning activities within the classroom context, as well as within other learning spaces: in light of the Conference theme, they can constitute possible resources or, on the contrary, obstacles for the mathematics learning.

Whereas there has been a focus on language and written representations since the 1980s, more recently attention has also been given to embodied forms of representation and thinking, such as gestures, considered mainly as resources for teaching and for learning (Arzarello, 2008; Arzarello et al., 2009; Radford, 2002, 2014). Other studies have investigated the role of new technologies and ICT as possible mediators for learning (Drijvers et al., 2010). Thus, Subtheme 3 includes the discussion on the possible uses of new technologies as resources for the learning of mathematics, but also on the possible obstacles that the introduction of new technologies could produce at several levels (cognitive, didactic, communicative, etc.).

Concerning classroom practices, the role of the teacher comes to the fore. Even from possibly different theoretical positions, the teacher is usually intended as a resource for students' learning. In this regard, teachers need to deal with different cognitive demands, in particular with those of students having learning difficulties in mathematics, as widely discussed in literature (Dehaene, 1997, Landy & Goldstone, 2010). A conscious use of specific teaching strategies suitable for students diagnosed with learning disorders, in particular with developmental dyscalculia (Butterworth, 2005; Dehaene, 1997), is also important for those students who are not officially diagnosed, but have learning difficulty profiles very similar to those of dyscalculic students. Therefore, the development of innovative teaching support looks like an ever more necessary goal for research in mathematics education in general, and for teachers in particular.

Although school is the most important institution for learning, we know that it is not the only place where we learn. But, what do we mean by learning? It is common to find teachers with a restricted view concerning what it means to learn mathematics. Often learning is associated with the reproduction of counting procedures and calculation formulas. Although this idea has been overtaken, at least for research within mathematics education, it seems, unfortunately, that some teaching or training practices are still restrictive and do not acknowledge that learning can be observed through different lenses. We learn in formal and non-formal spaces (museums, distance learning programs, game playing, etc.), in face-to-face or online dynamic environments. We believe that teaching mathematics in any context should promote the development of thinking that offers potential for the student in their present and their future, regardless of their of future occupations or professional work. Processes such as developing curiosity, critical thinking, reasoning, and motivation to learn, as well as developing modes of verification, refutation, and deduction should all be leveraged both in the classroom and also in non-formal learning spaces.

Subtheme 3 includes the discussion about:

- *What are the features that characterize the teacher's practices as resources for students and how is it possible to foster these features?*
- *A provocative question: Can a teacher be an obstacle to the students' learning? Why and how does it happen? How could it be prevented?*
- *How can technologies and ICT be possible mediators for inclusive teaching and learning?*
- *How can embodied forms of representation and thinking, such as gestures, or other different registers of representation, such as visual-verbal, visual-non-verbal, auditory, and kinaesthetic, be considered as resources for inclusive teaching and learning ?*
- *Which resources or teaching strategies are being used to enhance the learning potential of all students, particularly those with learning difficulties?*
- *Which new aspects of mathematics learning can be improved in formal learning spaces or in non-formal environments?*
- *What the advantages or restrictions of ICT or more conventional resources (e.g., the manipulative ones) in promoting mathematical learning within formal or informal contexts?*

Subtheme 4. Cultural, political, and social issues

Since the 1980s at least, there have been challenges to assumptions that mathematics is culture- and value-free (Bishop, 1988; D'Ambrosio, 1985; Ellerton & Clements, 1989). There is also a developing awareness that mathematics education itself was not only portrayed as culture- and value-free, but also was effectively excluding or alienating many girls and women as well as boys and men who did not conform to the stereotypes found in classroom and textbook examples, or the choices of abstract, highly theoretical curricula. To epitomize this shift of research in mathematics education, the terms 'social turn' and 'sociopolitical turn' (Gutiérrez, 2010; Lerman, 2000) have appeared. Now, it has become broadly accepted that we can no longer think of mathematics and mathematics education as far removed from cultural, social and political issues when studying and trying to improve mathematics education.

Cultural, political, and social contexts can be considered as obstacles and/or as resources for students' success in mathematics. On the one hand, we can consider these as obstacles for students' access to, and their achievement in, mathematics education. Although less prevalent in Western countries, but nevertheless of fundamental importance, the physical access to schooling and mathematics classrooms has received attention (e.g., Kazima & Mussa, 2011). On a second level, curricular reforms and counter-reforms have often transformed the obstacles for mathematics learning that some social groups face (e.g., Jablonka & Gellert, 2011; Vithal & Skovsmose, 1997). This second level is concerned with the distribution of different forms of mathematical knowledge: Who gets access to which forms of mathematical knowledge? On a third level, the question has been raised as to how instructional and educational strategies complicate or impede access to, and participation in, institutionally and socially valued forms of mathematical activities for particular groups of students (e.g., Straehler-Pohl et al., 2014). Cultural (e.g., the culture-specific importance of orality), political (e.g., policies for integration of migrants), and social (e.g., relative poverty) conditions, taken separately, but mostly combined, often translate into obstacles for the teaching and learning of mathematics.

On the other hand, cultural, political, and social conditions can be regarded as resources. This is quite obvious in the case of privilege, where students' backgrounds and foregrounds easily prove beneficial for the acquisition of the school subjects' dominant registers and orientations to meaning (e.g., cultural capital and middle-class codes). The crucial point is if, and if so, how, not-yet-valued experiences and activities of underprivileged students can be used as resources for the teaching and learning of mathematics. As an example, Barton and Frank (2001) reflecting on minority cultures ask: "What are the conditions under which" (...) children, for whom the (conventionally) 'basic' mathematical concepts are not readily available because of incommensurable concepts powerfully present in their own cultural-linguistic heritage, "have a cognitive advantage in mathematics, and what is the nature of that advantage?" (p. 147). Healy and Powell (2013), examining multiple resources for mathematics learning, conclude that there is a wealth of studies showing how being multilingual relates positively to cognitive development. These studies also call for more invitation and encouragement of students to use their linguistic resources within mathematical activities. Bringing these two perspectives together, understanding the cultural, political, and social conditions that create obstacles for mathematics teaching and learning, might lead us to understand the micro- and the macro-social processes that disadvantage individuals.

As a matter of fact, diversity is an essential part of what it is to be human. Even within the same family unit there are differences between the children in terms of their interests and aptitudes. Within classrooms where students apparently share the same social and cultural backgrounds there is no uniformity. Particularly in recent times of global flows of people, many classrooms are likely to comprise students with diverse social, cultural, and linguistic backgrounds, and these offer both a resource and a challenge to teachers who may lack systemic support, as well as being expected to work under increasing pressures of time and accountability. This is in the face of mission statements and policy documents that state that each child or learner is an individual and should receive personalised attention from his/her provider of education.

Finally, understanding how cultural, political, and social conditions can become resources for learners might require us to analyse how curriculum, teaching strategies and learning scenarios can be more finely tuned to the backgrounds and foregrounds of particular groups of students.

Questions:

- *How do cultural, political, and social contexts restrict access to, and participation in, valuable forms of learning mathematics? How can these restrictions be overcome?*
- *How can underprivileged students' backgrounds and foregrounds be used as resources for the teaching and learning of mathematics?*
- *How could we rethink theories and practices of mathematics teaching to improve cognitive and affective outcomes for bilingual/multilingual students?*
- *How could we foster the inclusion of students from different cultural backgrounds within the mathematics classroom and in the broader society?*
- *How could we deal with challenges of gender stereotypes and other gender-related issues and the inequalities they create?*
- *How do policy designers take into consideration any kind of diversity and inequality in your country or region (e.g., the EU)?*

REFERENCES

Adler J., Ball D., Krainer K., Lin F. L., & Novotna J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 359-381.

Armatte, M. (2010). Le rôle de l'histoire dans l'enseignement de la statistique. *Statistique et Enseignement, 1*(2), 23-47.

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era. An international perspective on technology focused professional development* (pp. 347-372). Dordrecht: Springer.

Arzarello, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. In E. Emborg & M. Niss (Eds), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematical Education* (ICME 10) (pp. 158-181). Copenhagen, Denmark: Roskilde University, IMFUFA.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97-109.

Bairral, M. A., & Powell, A. B. (2013). Interlocution among problem solvers collaborating online: A case study with prospective teachers *Pro-Posições, 24*(1), 1-16. doi: http://dx.doi.org/10.1590/S0103-73072013000100005.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group Edmonton* (pp. 3-14). AB: CMESG/GDEDM.

Bartolini Bussi M., & Bazzini L. (2003). Research, practice and theory in didactics of mathematics: Towards dialogue between different fields. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 203-223.

Barton, B., & Frank, R. (2001). Mathematical ideas and indigenous languages. In B. Atweh, H. Forgasz, & B. Nebres (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education: An international perspective* (pp. 135–149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Batanero, C., Godino, J., Vallecillos, A., Green, D., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal in Mathematics, Science and Technology, 25*(4), 527-547.

Bazzini, L. (1991). Curriculum development as a meeting point for research and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/4,* 128-131.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brown, S., & Cooney, T.(1991). Stalking the dualism between theory and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/4*, 112-117.

Burton, L. (1991). Models of systematic co-operation between theory and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/4*, 118-121.

Butterworth B. (2005). Developmental dyscalculia. In J. I. E. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 455-467). Hove, UK: Psychology Press.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir einsegné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Sinclair, N. (Eds.) (2014). *The mathematics teacher in the digital era. An international perspective on technology focused professional development* (pp. 347-372). Dordrecht: Springer.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013). Primary teachers' beliefs and emotional disposition towards mathematics and its teaching. In B. Di Paola (Ed), *Proceedings of CIEAEM 65. Quaderni di ricerca in didattica (mathematics), Issue 23*(1), 217-226.

D'Ambrosio, U. (1985). *Socio-cultural bases for mathematics education*. Campinas, Brazil: UNICAMP.

Dehaene S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* New York, Oxford University Press.

DelMas, R., Garfield, J., Ooms A., & Chance, B. (2007). Assessing items students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), 28-58.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M.-A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology —Rethinking the terrain: The 17th ICMI study* (pp. 89-132). New York: Springer.

Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (1989). *Teaching post-secondary mathematics at a distance: A report to the Commonwealth Secretariat*. Geelong, Vic: Deakin University.

Even, R., & Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study.* New York: Springer.

Fabre, M. (2010). Problématisation des savoirs. In A. Van Zanten (Ed.), *Dictionnaire pédagogique* (pp. 539–541). Paris: Presses Universitaires de France.

Fine J. (2010). Probabilités et statistique inférentielle. Approche sondage versus approche modèle. *Statistique et Enseignement, 1*(2), 5-21.

Gattuso, L. (2011). L'enseignement de la statistique: Où, quand, comment pourquoi pas? *Statistique et Enseignement, 2*(1), 5-30.

Godino, J. D., & Batanero C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity. The 8th ICMI study* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Gutiérrez, R. (2010). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 37–68.

Hahn, C. (2014). Linking academic knowledge and professional experience in using statistics: a design experiment for business school students. *Educational Studies in Mathematics, 86*(2), 239-251.

Healy, L., & Powell, A. B. (2013). Understanding and overcoming "disadvantage" in learning mathematics. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 69–100). New York: Springer.

Jablonka, E., & Gellert, U. (2011). Potentials, pitfalls, and discriminations: Curriculum conceptions revisited. In B. Greer & O. Skovsmose (Eds.), *Critique and politics of mathematics education* (pp. 287–308). Rotterdam: Sense.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 187-211.

Kazima, M., & Mussa, C. (2011). Equity and quality in mathematics education in Malawi schools. In B. Atweh, M. Graven, W. Secada, & P. Valero (Eds.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (pp. 163–176). Dordrecht: Springer.

Krainer, K. (2011). Teachers as stakeholders in mathematics education research. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1), (pp. 47-62). Ankara, Turkey: PME.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239–271). Dordrecht: Kluwer.

Landy D., & Goldstone R. L. (2010). Proximity and precedence in arithmetic. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 63*, 1953-1968.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport, CT: Ablex.

Meletiou-Mavrotheris, M., & Lee, C. (2002). Teaching students the stochastic nature of statistical concepts in a introductory statistics course, *Statistics Education Research Journal, 1*(2)*,* 22-37.

Peters, S. (2011). Robust understanding of statistical variation, *Statistics Education Research Journal, 10*(1), 52-88.

Ponte, J. P., Matos, J. F., Guimarães, H. M., Leal, L. C., & Canavarro, A. P. (1994). Teacher's and students' view and attitude towards a new mathematical curriculum: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 347-365.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26-30.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14–23.

Radford. L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 405–422.

Serrado A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparitodemou, E. (2014). Early statistics: A course for developing teachers' statistics technological and pedagogical content. *Statistique et Enseignement, 5*(1), 5-29.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Steinbring H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1,* 157-189.

Straehler-Pohl, H., Fernández, S., Gellert, U., & Figueiras, L. (2014). School mathematics registers in a context of low academic expectations. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 175–199.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics: An introduction. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 1), (pp. 1-12). Rotterdam: Sense.

Vithal, R., & Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: A critique of 'ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 131–157.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identities*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wittmann E. C. (1991). From inservice-courses to systematic cooperation between teachers and researchers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/5*, 158-160.

Wood, T. (Series Ed.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education* (Vols. 1-4). Rotterdam: Sense.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: The value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *18*(4), 465-487.

Document de Discussion

Thème de la conférence: **Enseignement et apprentissage des mathématiques : ressources et obstacles**

Introduction

L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques sont un système complexe, impliquant une multitude de facteurs et de composantes, allant de l'épistémologie de la discipline à la psychologie cognitive, aux environnements sociaux-culturels, à des éléments affectifs et aux systèmes technologiques. Au cœur du système se trouve l'idée selon laquelle donner du sens aux mathématiques est un prérequis à la construction de la connaissance. A cet égard, il convient d'analyser les interactions qui existent entre les objets réels et les constructions mathématiques, le rôle des processus de pensée et les langages (souvent en relation avec la réalisation d'expériences), ainsi que l'influence des croyances et des émotions. Tous ces facteurs peuvent être trompeurs, i.e., ils peuvent à la fois fournir des ressources et/ou des obstacles pour le développement de la connaissance mathématique. En ce sens, l'expertise professionnelle du professeur a une importance majeure : en réalité le professeur a la responsabilité d'être en mesure de faire faire face, non seulement aux aspects relatifs aux contenus de la discipline, mais également aux facteurs qui interagissent (et interfèrent) dans le processus liant l'enseignement à l'apprentissage. Il est nécessaire pour le professeur de mathématiques d'être conscient de ces enjeux, à la fois dans l'élaboration des activités en classe mais aussi dans la réalisation de ces activités avec les élèves et les étudiants.

Les quatre sous-thèmes (et questions affiliées) que nous proposons dans les lignes suivantes doivent être considérés comme des moyens visant à promouvoir l'investigation et faciliter le débat. Tous les sous-points sont fortement corrélés : leur différenciation est purement fonctionnelle dans la simplification de l'organisation des groupes de travail pendant la conférence.

Sous-thème 1. Contenu mathématique et développement du curriculum

La relation entre les mathématiques en tant que discipline et le contenu mathématique qui doit être enseigné nous rappelle la dialectique théorie / pratique qui s'est vu accorder un intérêt grandissant depuis les années 90 (voir, e.g., Brown & Cooney, 1991 ; Burton, 1991 ; Godino & Batanero, 1997 ; Wittmann, 1991). Dans la recherche des conditions pour séparer la connaissance entre les deux pôles, on retrouve notamment la preuve qu'une conception qui assigne à la « théorie » le rôle d'instruire la « pratique » est vouée à l'échec et, par conséquent, rend compte d'un besoin croissant de développer les interactions qui existent entre les deux pôles ainsi que dans la coopération qui existe entre les acteurs impliqués dans le système éducatif (Bartoli Bussi & Bazzini, 2003).

Depuis les années 80, une contribution significative dans le débat a été fournie par Chevallard, qui a étudié le phénomène de transposition didactique, produisant ainsi des éléments de connaissance à propos des systèmes didactiques des contenus pour l'enseignement des mathématiques. Cela conduisit au développement de la théorie de la transposition didactique ainsi que dans sa réalisation pratique (Chevallard, 1985). Cette idée a été davantage développée, dans les années 90 et ensuite, dans une étude plus générale à l'intérieur de laquelle on retrouve une pratique des mathématiques qui prend la forme de différentes praxéologies (combinant praxis et logos).

En se concentrant sur l'épistémologie des mathématiques et en remarquant la persistance des difficultés des étudiants lorsqu'il s'agit de concepts spécifiques, Brousseau (1997) s'est intéressé à la notion « d'obstacle épistémologique » dans les mathématiques. Cette idée a inspiré des recherches sur l'éducation mathématique, ouvrant ainsi la voie dans la recherche d'autres sortes d'obstacles, liés aux aspects didactiques et aux aspects cognitifs, ainsi qu'à la critique de la notion d'obstacle épistémologique basée sur l'histoire et la culture (Radford, 1997).

Les interactions dialectiques entre la théorie et la pratique ont constitué l'essentiel du travail des développeurs de curriculum, principalement quand les différents acteurs (chercheurs, enseignants, directeur d'école) se voient dans l'obligation de travailler ensemble. Dans de telles situations, le développement de curriculum peut être une belle opportunité pour la coopération et l'enrichissement mutuel, et se traduit par une contribution pour l'école (Bazzini, 1991). Ce thème sera également abordé dans le deuxième point (voir ci-dessous).

Le choix du contenu à inclure dans le curriculum est un enjeu important qui requiert des investigations attentives dans tous les contextes. A côté de contenus traditionnels tels que l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie, de nouveaux contenus doivent être inclus dans les curricula : la pensée probabiliste et stochastique en sont un exemple.

Depuis ces dernières années, la plupart des pays ont introduit ou développé les contenus statistiques dans les cours de mathématique en primaire et dans le secondaire. Les raisons sont nombreuses : prendre en compte l'augmentation du pouvoir stochastique dans le domaine des mathématiques, la volonté de développer de nouvelles approches pédagogiques fondées sur la modélisation de situations réelles et de l'interdisciplinarité qui sont devenus une exigence sociétale.

Dans l'apprentissage supérieur, de plus en plus de cours incorporent les statistiques au niveau Licence comme dans les programmes Doctoraux. A ce niveau les variations sectorielles sont multiples (statistique pour la biologie, management, psychologie, etc.) avec, comme il l'a été remarqué par Jeanne Fine (2010), selon les mots de Bourdieu, un risque important d'hyperspécialisation et un affaiblissement identitaire de la discipline. Les fondations sont supposément acquises durant la période qui précède les études et l'enseignement de la statistique se résume à la présentation par des non-spécialistes implémentant des techniques reposant sur l'utilisation de logiciels spécialisés. La dimension opérationnelle de la connaissance est privilégiée aux dépens des dimensions systématiques et historiques (voir Fabre 2010), avec le risque que les étudiants ne maîtrisent pas les concepts statistiques de base, comme cela a été souligné dans de nombreuses études et recherches (voir , en particulier, Batanero et al , 1994 ; Delmas et al,2007). Les épistémologies multiples, le plus souvent non clarifiées, sont une source de difficulté pour les étudiants qui ne sont pas en mesure d'identifier clairement d'où l'enseignant parle d'un point de vue épistémologique (Armatte 2010).

Il est vrai que la statistique est une discipline dont l'épistémologie est complexe. Cependant, il est important que cette discipline soit enseignée par des spécialistes dans l'enseignement supérieur et soit intégrée dans les cours de mathématiques dans le secondaire afin qu'elle ne soit pas diluée dans les disciplines hôtes (Gatuso, 2011). Mais il existe beaucoup de différences avec les mathématiques, des différences qui doivent être explicites dans le contexte de la formation des professeurs de mathématique. En statistiques, les étudiants devraient être amenés à abandonner leur vision du monde déterministe et à considérer le manque de certitude comme un trait à part entière de la réalité (Meletiou-Mavrotheris & Lee, 2002). La différence fondamentale entre les statistiques et les mathématiques est que, dans les statistiques, le contexte bénéficie d'un statut particulier : il fait partie intégrante du problème. Le risque de malentendu entre les étudiants et les professeurs, lié aux différences de représentations, est donc plus grand (Hahn, 2014). En statistiques les étudiants devraient à la fois être en mesure de maîtriser les raisonnements inductifs et déductifs (Fine, 2010), et combiner ainsi deux perspectives : l'approche centrée sur les données et l'approche modélisation, plus formelle (Armatte, 2010 ; Peters, 2011). Cela n'est pas seulement fait pour maîtriser les concepts mais aussi pour développer une logique statistique (Gattuso, 2011), intégrant l'utilisation de la technologie, ce qui est essentiel en statistique (Serrado et al, 2014).

Le débat précédent ouvre la voie pour des contributions au sous-thème 1 de la conférence CIEAEM67, qui se concentre sur les enjeux liés aux aspects épistémologiques de l'enseignement des mathématiques et se situe dans une dialectique obstacle/ressource. Le sous-thème 1 mettra l'accent sur les questions suivantes :

- *Quels obstacles pourraient interférer avec l'enseignement ? Quelle est leur nature ? Quelles seraient les stratégies possibles pour les surmonter ?*
- *Quels obstacles pourraient interférer avec l'apprentissage ? Quelle est leur nature ? Quelles seraient les stratégies possibles pour les surmonter ?*
- *Quels sont les obstacles et les ressources dont on dispose dans les différents curriculums à l'échelle nationale ?*
- *Quelle expertise professionnelle est nécessaire pour développer et implémenter un curriculum?*
- *Faut-il accorder une attention particulière à un contenu spécifique ?*
- *La statistique devrait-elle être présentée à l'école primaire ? Comment devrions-nous penser la préparation des professeurs qui seront en charge d'enseigner la statistique à chacun des différents niveaux d'étude (primaire, secondaire, supérieur) ? Quelles sont les différences/complémentarités entre les mathématiques et la statistique ?*

Sous-thème 2. La formation des enseignants

La formation des professeurs s'est vu octroyer une attention plus importante au cours de la dernière décennie (Clark-Wilson et al.,2014 ; Even & Ball (Eds.), 2009 ; Wood (Ed.), 2008). Ce « domaine émergent » (Adler et al., 2005) trouve ses racines dans les recherches précédentes faites autour des processus apprentissage/enseignement des salles de classes. Avec la diffusion progressive des nouveaux modèles d'enseignement et d'apprentissage depuis les années 60, le rôle du professeur dans la salle de classe a changé radicalement. En réalité, les nouvelles façons d'apprendre requièrent également des nouvelles façons d'enseigner : ce changement n'est pas spontané ; au contraire, afin de le mettre en place il faut encourager des initiatives appropriées dans la formation des enseignants.

Les recherches ont mis en évidence les différents aspects ayant à voir avec la formation des professeurs de mathématiques : de la spécificité des connaissances nécessaires aux enseignants jusqu'aux aspects affectifs, de l'inclusion des nouvelles technologies aux analyses systémiques.

Les réflexions sur le type de connaissances qui caractérisent le professeur de mathématique dans son travail professionnel a été établi dans le travail précurseur et fondamental de Dhulman (1986). Ponte et al. (1994) soutient l'idée selon laquelle il convient d'allier le contenu mathématique aux connaissances pédagogiques, en faisant appel aux différentes composantes de la connaissance actuelle afin de produire une restructuration des compétences et des savoir faire des professeurs. Ce contenu des connaissances pédagogiques va bien au-delà d'une simple représentation du sujet en question : il doit inclure « un corps intelligible d'images, de principes, et de règles pour l'action, de la généralité, davantage de spécificité, architecturé autour d'une rationalité transparente, prenant en considération la nature particulière du contenu sous-jacent et suffisamment puissant pour guider l'action de l'enseignant » (p. 358). Steinbring (1998) explore une composante spécifique de la connaissance professionnelle pour les professeurs de mathématique, à savoir « une connaissance épistémologique dans des contextes sociaux d'apprentissage social (p 160) ». Il affirme que « les enseignants ont certainement besoin d'un contenu de connaissances mathématiques et pédagogiques ; et, au sein du domaine des connaissances pédagogiques, ils auraient également besoin d'une connaissance épistémologique, ainsi ils seraient en mesure de jauger des limites de la connaissance mathématique dans les différents domaines sociaux d'enseignement, d'apprentissage et de communication mathématique. Cette composante importante qu'est la connaissance épistémologique des mathématiques dans des contextes sociaux d'apprentissages n'est pas, un corpus de connaissances systématisé, qui pourrait être enseigné aux futurs enseignants par le biais d'un programme fixe. Il conviendrait plutôt de dire que la connaissance épistémologique se compose d'éléments de connaissances exemplaires, car elle se réfère à des études de cas relatives à l'analyse de composantes propres à l'enseignement ou à des entrevues avec des étudiants, et comprend idées conceptuelles historiques, philosophiques et épistémologiques » (p. 160). Ball et Bass (2003) formalisent les caractéristiques des mathématiques qui sont impliquées dans l'enseignement dans le Modèle du Savoir Mathématique des Enseignants. Ils identifient le savoir des contenus spécialisés comme un sous-domaine important de la connaissance mathématique, strictement lié à l'activité de l'enseignant. La connaissance du contenu spécialisé s'apparente souvent avec les connaissances et les compétences liées aux technologies numériques, qui ont également acquis une importance croissante dans le contexte de la formation des enseignants (Bairral & Powell, 2013; Drijvers et al., 2010).

D'autre part, plusieurs études ont portées sur la dimension sociale des programmes de formation des enseignants, en particulier l'implication des enseignants dans l'analyse et la réflexion commune avec des chercheurs. Dans la littérature de recherche, nous trouvons des notions importantes comme celles de « communauté de pratique » (Wenger, 1998) et de « communautés d'enquête » (Jaworski, 2006); la pierre angulaire de ces études étant la notion de réflexion critique, conçu non seulement comme une attitude fondamentale qui doit être développée par les enseignants, mais aussi comme une responsabilité professionnelle. Cette idée est liée à celle selon laquelle il doit exister une collaboration entre les enseignants et les chercheurs, comme Krainer (2011) le souligne lorsqu'il préconise de considérer les chercheurs comme « les principales parties prenantes dans la pratique » et les enseignants comme « les principales parties prenantes dans la recherche. »

Outre les dimensions épistémologiques et sociales, la dimension affective se voit octroyer un rôle important dans le travail des enseignants ainsi que dans la formation de ces derniers. Cela inclut l'étude de l'influence des croyances et des émotions des enseignants sur leurs façons d'enseigner les mathématiques. En fait, comme le souligne Zembylas (2005),les connaissances des enseignants se trouvent dans « les vies vécues par les enseignants, dans les valeurs, les croyances et les convictions profondes adoptées dans la pratique, dans le contexte social qui entoure ces pratiques, et dans les relations sociales qui animent l'enseignement et la rencontre d'apprentissage ». Ces valeurs, les croyances et les émotions entrent en jeu à mesure que les enseignants prennent des décisions, d'agir et de réfléchir sur les différents objectifs, sur les méthodes et sur les significations de l'enseignement. (p. 467)

Ceci est particulièrement édifiant lorsqu'il s'agit des enseignants du primaire, qui sont des enseignants généralistes et qui doivent parfois enseigner les mathématiques en dépit de leurs dispositions personnelles envers les mathématiques. Par conséquent, les croyances et les émotions des enseignants envers les mathématiques peuvent constituer des obstacles à la pratique d'un enseignement efficace. L'étude des conditions dans lesquelles cette hypothèse est vraie reste un problème ouvert. D'autre part, des expériences et des émotions personnelles négatives peuvent également s'avérer être des ressources pour les enseignants, comme cela l'a été suggéré par Coppola et al. (2013) lors, plus particulièrement, de sa réflexion sur les futurs enseignants.

Enfin, les processus de formations des enseignants de mathématiques doivent également être considérés selon une approche systémique, en mettant l'accent sur les relations et les dynamiques qui existent entre les différentes « variables » inclues dans ces processus complexes: les connaissances et les pratiques des enseignants, les aboutissements des recherches, les contraintes institutionnelles (contraintes de programmes nationaux en particulier), les traditions, les aspects culturels, et ainsi de suite. Compte tenu de cette complexité, le développement des enseignants peut être considéré comme un processus de transposition didactique méta-évolution au fil du temps (Arzarello et al., 2014).

A partir de ce développement, et à partir des contributions faites par cette dernière, le sous-thème 2 dans CIEAEM67 vise à repenser la complexité de la formation des enseignants en termes de ressources ainsi que les éléments qui font obstacle à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les questions suivantes peuvent, en outre, orienter la discussion :

• Comment est-il possible d'aider les enseignants à développer les connaissances et les compétences appropriées dans les technologies numériques afin qu'ils soient efficaces dans leur enseignement des mathématiques ?

• Quels sont les principaux obstacles au développement de l'enseignement des mathématiques ?

• Comment la dimension sociale peut-elle devenir une ressource pour la formation des enseignants ? Quels sont les défis auxquels les programmes fortement basés sur l'interaction sociale dans les communautés de pratique / enquête sont confrontés?

• Comment la dimension affective peut-elle devenir une ressource pour la formation des enseignants ?

Sous-thème 3. Pratiques en classe et autres espaces d'apprentissage

La pensée mathématique est issue et se développe dans une interaction complexe de langues et de représentations, au travers de références à des intuitions, des métaphores et des analogies, et en faisant usage de divers objets et outils, qui interagissent avec notre nature corporelle. Tous ces éléments sont essentiels pour l'enseignement et pour les activités d'apprentissage qui sont réalisées dans le contexte de la classe, ainsi que dans d'autres espaces d'apprentissage : à la lumière du thème de la conférence, ils peuvent constituer des ressources possibles ou, au contraire, des obstacles pour l'apprentissage des mathématiques.

Alors que, depuis les années 1980, l'attention a d'abord porté sur la langue et les représentations écrites, plus récemment, l'attention a également été accordée aux formes plus matérialisées de la pensée et de la représentation, comme les gestes qui sont considérés, principalement, comme des ressources pour l'enseignement ainsi que pour l'apprentissage (Arzarello, 2008; et Arzarello al, 2009;. Radford, 2002, 2014). D'autres études se sont intéressées au rôle des nouvelles technologies et des TIC en tant que médiateurs possibles pour l'apprentissage (Drijvers et al., 2010). Ainsi, le sous-thème 3 fait aussi référence aux utilisations possibles des nouvelles technologies comme des ressources pour l'apprentissage des mathématiques, mais aussi sur les éventuels obstacles que l'introduction de nouvelles technologies pourrait produire à plusieurs niveaux (cognitif, didactique, communication, etc.).

En ce qui concerne les pratiques dans la classe, le rôle de l'enseignant doit aussi être abordé. Même à partir, éventuellement, de différentes positions théoriques, l'enseignant est généralement vu comme une ressource pour l'apprentissage des élèves. À cet égard, les enseignants doivent faire face à différentes exigences cognitives, en particulier à celles des élèves ayant des difficultés d'apprentissage en mathématiques, comme largement discuté dans la littérature (Dehaene, 1997, Landy et Goldstone, 2010). Une utilisation consciente de stratégies d'enseignement appropriées et spécifiques pour les élèves diagnostiqués comme ayant des troubles d'apprentissage, en particulier avec la dyscalculie développementale (Butterworth, 2005; Dehaene, 1997), est également important pour les étudiants qui ne sont pas officiellement diagnostiqués, mais présentent des difficultés d'apprentissage enclin aux difficultés très similaire à celui des élèves dyscalculiques. Par conséquent, le développement de pratiques innovantes dans l'enseignement est un objectif de plus en plus nécessaire pour la recherche en didactique des mathématiques en général, et pour les enseignants en particulier.

Bien que l'école soit l'institution la plus importante pour l'apprentissage, nous savons que ce n'est pas le seul endroit où l'on apprend. Mais, qu'entendons-nous par l'apprentissage ? Il est fréquent de trouver des enseignants qui ont une vue restreinte de ce que peut signifier apprendre les mathématiques. Souvent, l'apprentissage est associé à la reproduction des méthodes de comptage et à des formules de calcul. Bien que cette idée soit dépassée, au moins pour la recherche dans l'enseignement des mathématiques, il semble, malheureusement, que certaines pratiques d'enseignement ou de formation soient encore restrictives et ne reconnaissent pas que l'apprentissage peut être observé à travers un prisme différent. Nous apprenons, en effet, également dans les espaces formels et non formels (musées, programmes d'apprentissage à distance, jeu , etc.), dans les environnements dynamiques, en face-à-face ou en ligne. Nous croyons que l'enseignement des mathématiques en contexte devrait favoriser le développement d'une pensée qui offre un potentiel pour l'étudiant dans son présent et son avenir, indépendamment de lses futures occupations ou activités professionnelles. Des procédés tels que le développement de la curiosité, la pensée critique, le raisonnement et la motivation à apprendre, ainsi que les moyens de développer la vérification, la réfutation, et la déduction devraient tous être mis à profit à la fois dans la classe et aussi dans des espaces d'apprentissages non formels.
Le sous-thème 3 mettra l'emphase sur les questions suivantes :
• Quels sont les éléments qui caractérisent les pratiques de l'enseignant en tant que ressources pour les étudiants et comment est-il possible de favoriser ces éléments ?

• Une question provocatrice: un enseignant peut-il être un obstacle à l'apprentissage des élèves ? Pourquoi et comment cela serait-il possible ? Comment cela pourrait-il être évité ?

• Comment les technologies et les TIC peuvent-ils être des médiateurs possibles pour l'enseignement et l'apprentissage inclusif ?

• Comment les différentes formes incorporées de la représentation et de la pensée, comme les gestes, ou d'autres registres de représentation, tels que Visuel-verbal, visuel non-verbal, auditif, kinesthésique soient considérés comme des ressources pour l'enseignement et l'apprentissage inclusif ?

• Quelles sont les ressources ou les stratégies d'enseignement qui sont utilisées pour améliorer le potentiel d'apprentissage de tous les élèves, en particulier ceux qui ont des difficultés d'apprentissage ?

• Quels sont les nouveaux aspects de l'apprentissage des mathématiques qui pourraient-être améliorés dans des espaces d'apprentissages formels ou dans des environnements non formels ?

• Quels sont les avantages ou les restrictions des TIC ou celles des ressources plus classiques (par exemple, ceux de la manipulation) dans la promotion de l'apprentissage des mathématiques dans des contextes formels ou informels?

Sous-thème 4. Les questions culturelles, politiques et sociales

Depuis les années 1980, au moins, on a contesté l'hypothèse selon laquelle les mathématiques ne seraient pas influencées par la culture (Bishop, 1988; D'Ambrosio, 1985; Ellerton & Clements, 1989). Il y a aussi une prise de conscience croissante du fait que l'enseignement des mathématiques est non seulement dépeint comme n'étant pas influencé par la culture, mais que par ailleurs il excluait ou aliénait de nombreuses jeunes filles et femmes ainsi que les garçons et les hommes qui ne se conforment pas aux stéréotypes présents dans la classe ou dans les manuels scolaires, ou encore au choix de programme trop abstrait et très théorique. Pour incarner ce changement de la recherche dans l'enseignement des mathématiques, les termes de « changement social »et de « changement sociopolitique » (Gutiérrez, 2010; Lerman, 2000) ont fait leur apparition. Maintenant, il est devenu courant de penser que les mathématiques ainsi que leur enseignement ne peuvent être éloignés des questions culturelles, sociales et politiques. C'est pourquoi tout est mis en œuvre pour mener à bien des études visant à améliorer l'enseignement des mathématiques.

Les contextes culturels, politiques et sociaux peuvent être considérés comme des obstacles et / ou comme des ressources jouant dans la réussite des élèves en mathématiques. D'une part, nous pouvons les considérer comme des obstacles pour des étudiants en termes d'accès et en termes de compréhension vis-à-vis de l'enseignement des mathématiques. Bien que moins répandu dans les pays occidentaux, mais néanmoins d'une importance fondamentale, l'accès physique aux écoles et aux cours de mathématiques a reçu de l'attention (par exemple, Kazima & Mussa, 2011). À un second niveau, les réformes des programmes et les contre-réformes ont souvent transformées les obstacles à l'apprentissage des mathématiques auxquels certains groupes sociaux sont confrontés (par exemple, Jablonka & Gellert, 2011; Vithal & Skovsmose, 1997). Ce deuxième niveau concerne la répartition des différentes formes de la connaissance mathématique: Qui a accès à quelles formes de connaissances mathématiques ? À un troisième niveau, la question a été posée sur la façon dont les stratégies d'enseignement et d'éducation compliquent ou empêchent l'accès et la participation dans des formes institutionnellement et socialement reconnues des activités mathématiques pour des groupes particuliers d'étudiants (par exemple, Straehler-Pohl et al., 2014). Les conditions culturelles (par exemple, l'importance spécifique de la culture de l'oralité), politiques (par exemple, les politiques d'intégration des migrants), et sociales (par exemple, la pauvreté relative), prises séparément, mais surtout combinées, traduisent souvent des obstacles en termes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

D'autre part, les déterminismes culturels, politiques et sociaux peuvent être considérés comme des ressources. Cela est tout à fait évident dans le cas des privilèges, où le milieu social des étudiants et leurs horizons se mettent en avant facilement et peuvent s'avérer bénéfiques lorsqu'il s'agira d'assimiler les enseignements scolaires (par exemple, le capital culturel et les codes de la classe moyenne). Le point crucial est de savoir si, et si oui, comment, les expériences et les activités des étudiants défavorisés, qui ne sont pas évalués, peuvent être utilisées en tant que ressources pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. A titre d'exemple, Barton et Frank (2001) en s'interrogeant sur les cultures minoritaires demandent: « Quelles sont les conditions dans lesquelles » (...) les enfants, pour lesquels les concepts mathématiques « de base » ne sont pas facilement disponibles en raison de concepts incommensurables puissamment présents dans leur propre patrimoine culturel-linguistique, peuvent « avoir un avantage cognitif en mathématiques, et quelle est la nature de cet avantage? » (p. 147). Healy et Powell (2013), après avoir examiné plusieurs ressources relatives à l'apprentissage des mathématiques, concluent qu'il existe un grand nombre d'études montrant comment le fait d'être polyglotte est positivement lié au développement cognitif. Ces études appellent également à davantage encourager les élèves afin d'utiliser leurs ressources linguistiques dans les activités mathématiques. Rapprocher ces deux points de vues, comprendre les conditions culturelles, politiques et sociales qui créent des obstacles à l'enseignement des mathématiques et à l'apprentissage, pourraient nous amener à comprendre le micro et les macro-processus-sociaux des individus désavantagés.

En fait, la diversité est un élément essentiel de ce que c'est que d'être humain. Même au sein de la même unité familiale, il y a des différences entre les enfants en fonction de leurs intérêts et de leurs aptitudes. Dans les salles de classe où les élèves partagent apparemment les mêmes origines sociales et culturelles il n'y a pas d'uniformité. Plus particulièrement de nos jours, avec les flux mondiaux de personnes, de nombreuses classes sont susceptibles de comporter des étudiants venant de milieux sociaux, culturels et linguistiques divers, ce qui constitue à la fois une ressource et un défi pour les enseignants. Ils peuvent cependant manquer de soutien systémique, mais également à avoir à faire travailler de plus en plus souvent avec des contraintes de temps et de responsabilité. C'est dans le cœur même des énoncés des missions et des politiques d'éducation qui stipulent que chaque enfant ou étudiant est un individu et devrait recevoir une attention personnalisée de la personne qui fait son éducation.

Enfin, comprendre comment les conditions culturelles, politiques et sociales peuvent devenir des ressources pour les apprenants pourraient nous obliger à analyser comment le curriculum, les stratégies d'enseignement et les scénarios d'apprentissage pourraient être plus finement réglés par et pour les arrière-plans et avant-plans de groupes d'élèves.

Questions:

• Comment les contextes culturels, politiques et sociaux limitent-ils l'accès et la participation à des formes de valeur de l'apprentissage des mathématiques ? Comment ces restrictions peuvent-elles être surmontées ?

• Comment les *backgrounds* et les *foregrounds* des élèves défavorisés peuvent-ils être utilisés comme ressources pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?

• Comment pourrions-nous repenser les théories et les pratiques de l'enseignement des mathématiques pour améliorer les résultats cognitifs et affectifs des élèves bilingues / multilingues ?

• Comment pourrions-nous favoriser l'intégration des élèves et des étudiants de différentes origines culturelles dans la classe et dans la société en général ?

• Comment pourrions-nous faire face aux défis de stéréotypes de genre et d'autres questions liées au genre et aux inégalités qu'ils créent ?

• Comment les concepteurs de politiques prennent-ils en considération tous types de diversités et d'inégalités dans votre pays ou région (par exemple, l'UE)?

REFERENCES

Adler J., Ball D., Krainer K., Lin F. L., & Novotna J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 359-381.

Armatte, M. (2010). Le rôle de l'histoire dans l'enseignement de la statistique. *Statistique et Enseignement, 1*(2), 23-47.

Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C., Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era. An international perspective on technology focused professional development* (pp. 347-372). Dordrecht: Springer.

Arzarello, F. (2008). Mathematical landscapes and their inhabitants: Perceptions, languages, theories. In E. Emborg & M. Niss (Eds), *Proceedings of the 10th International Congress of Mathematical Education* (ICME 10) (pp. 158-181). Copenhagen, Denmark: Roskilde University, IMFUFA.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97-109.

Bairral, M. A., & Powell, A. B. (2013). Interlocution among problem solvers collaborating online: A case study with prospective teachers *Pro-Posições, 24*(1), 1-16. doi: http://dx.doi.org/10.1590/S0103-73072013000100005.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group Edmonton* (pp. 3-14). AB: CMESG/GDEDM.

Bartolini Bussi M., & Bazzini L. (2003). Research, practice and theory in didactics of mathematics: Towards dialogue between different fields. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 203-223.

Barton, B., & Frank, R. (2001). Mathematical ideas and indigenous languages. In B. Atweh, H. Forgasz, & B. Nebres (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education: An international perspective* (pp. 135–149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

Batanero, C., Godino, J., Vallecillos, A., Green, D., & Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal in Mathematics, Science and Technology, 25*(4), 527-547.

Bazzini, L. (1991). Curriculum development as a meeting point for research and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/4,* 128-131.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brown, S., & Cooney, T.(1991). Stalking the dualism between theory and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/4*, 112-117.

Burton, L. (1991). Models of systematic co-operation between theory and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/4*, 118-121.

Butterworth B. (2005). Developmental dyscalculia. In J. I. E. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 455-467). Hove, UK: Psychology Press.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir einsegné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Sinclair, N. (Eds.) (2014). *The mathematics teacher in the digital era. An international perspective on technology focused professional development* (pp. 347-372). Dordrecht: Springer.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013). Primary teachers' beliefs and emotional disposition towards mathematics and its teaching. In B. Di Paola (Ed), *Proceedings of CIEAEM 65. Quaderni di ricerca in didattica (mathematics), Issue 23*(1), 217-226.

D'Ambrosio, U. (1985). *Socio-cultural bases for mathematics education*. Campinas, Brazil: UNICAMP.

Dehaene S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics.* New York, Oxford University Press.

DelMas, R., Garfield, J., Ooms A., & Chance, B. (2007). Assessing items students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), 28-58.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M.-A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles, & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics* *education and technology —Rethinking the terrain: The 17th ICMI study* (pp. 89-132). New York: Springer.

Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (1989). *Teaching post-secondary mathematics at a distance: A report to the Commonwealth Secretariat*. Geelong, Vic: Deakin University.

Even, R., & Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study*. New York: Springer.

Fabre, M. (2010). Problématisation des savoirs. In A. Van Zanten (Ed.), *Dictionnaire pédagogique* (pp. 539–541). Paris: Presses Universitaires de France.

Fine J. (2010). Probabilités et statistique inférentielle. Approche sondage versus approche modèle. *Statistique et Enseignement, 1*(2), 5-21.

Gattuso, L. (2011). L'enseignement de la statistique: Où, quand, comment pourquoi pas? *Statistique et Enseignement, 2*(1), 5-30.

Godino, J. D., & Batanero C. (1997). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity. The 8th ICMI study* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Gutiérrez, R. (2010). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 37–68.

Hahn, C. (2014). Linking academic knowledge and professional experience in using statistics: a design experiment for business school students. *Educational Studies in Mathematics, 86*(2), 239-251.

Healy, L., & Powell, A. B. (2013). Understanding and overcoming "disadvantage" in learning mathematics. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 69–100). New York: Springer.

Jablonka, E., & Gellert, U. (2011). Potentials, pitfalls, and discriminations: Curriculum conceptions revisited. In B. Greer & O. Skovsmose (Eds.), *Critique and politics of mathematics education* (pp. 287–308). Rotterdam: Sense.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 187-211.

Kazima, M., & Mussa, C. (2011). Equity and quality in mathematics education in Malawi schools. In B. Atweh, M. Graven, W. Secada, & P. Valero (Eds.), *Mapping equity and quality in mathematics education* (pp. 163–176). Dordrecht: Springer.

Krainer, K. (2011). Teachers as stakeholders in mathematics education research. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1), (pp. 47-62). Ankara, Turkey: PME.

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239–271). Dordrecht: Kluwer.

Landy D., & Goldstone R. L. (2010). Proximity and precedence in arithmetic. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 63*, 1953-1968.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport, CT: Ablex.

Meletiou-Mavrotheris, M., & Lee, C. (2002). Teaching students the stochastic nature of statistical concepts in a introductory statistics course, *Statistics Education Research Journal, 1*(2)*,* 22-37.

Peters, S. (2011). Robust understanding of statistical variation, *Statistics Education Research Journal, 10*(1), 52-88.

Ponte, J. P., Matos, J. F., Guimarães, H. M., Leal, L. C., & Canavarro, A. P. (1994). Teacher's and students' view and attitude towards a new mathematical curriculum: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 347-365.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26-30.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14–23.

Radford. L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 405–422.

Serrado A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparitodemou, E. (2014). Early statistics: A course for developing teachers' statistics technological and pedagogical content. *Statistique et Enseignement, 5*(1), 5-29.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Steinbring H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1,* 157-189.

Straehler-Pohl, H., Fernández, S., Gellert, U., & Figueiras, L. (2014). School mathematics registers in a context of low academic expectations. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 175–199.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics: An introduction. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), ***Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development.*** *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 1), (pp. 1-12). Rotterdam: Sense.

Vithal, R., & Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: A critique of 'ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 131–157.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identities*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wittmann E. C. (1991). From inservice-courses to systematic cooperation between teachers and researchers. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 91/5*, 158-160.

Wood, T. (Series Ed.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education* (Vols. 1-4). Rotterdam: Sense.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: The value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *18*(4), 465-487.