

Propagazione Ondosa in Fibre Ottiche

Giulio Ciraoło

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini"
Università di Firenze

Ragusa Ibla, 2005

Outline

Guide d'onda rettilinee

Introduzione al Problema

Caso 2-D

Caso 3-D

Guide d'onda non rettilinee

Motivazioni fisiche

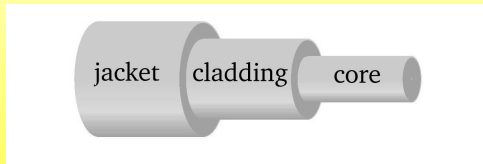
Mathematical framework

Simulazioni numeriche

Part I

Guide d'onda rettilinee

Fibre Ottiche



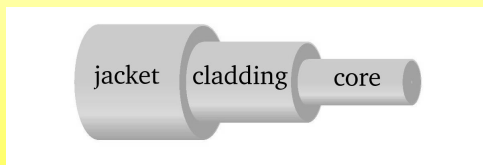
Notazioni

- ▶ n – indice di rifrazione
- ▶ n_0 – massimo di n
- ▶ n_{cl} – indice di rifrazione del *cladding*
- ▶ k – numero d'onda ($2\pi/\lambda$)

Tipi di energia

- ▶ Energia guidata
- ▶ Energia irraggiante
- ▶ Energia evanescente

Fibre Ottiche



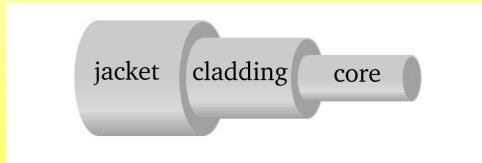
Notazioni

- ▶ n – indice di rifrazione
- ▶ n_0 – massimo di n
- ▶ n_{cl} – indice di rifrazione del *cladding*
- ▶ k – numero d'onda ($2\pi/\lambda$)

Tipi di energia

- ▶ Energia guidata
- ▶ Energia irraggiante
- ▶ Energia evanescente

Fibre Ottiche



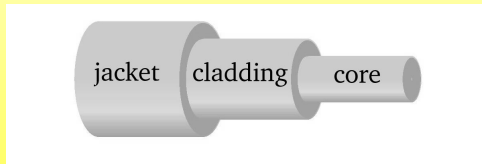
Notazioni

- ▶ n – indice di rifrazione
- ▶ n_0 – massimo di n
- ▶ n_{cl} – indice di rifrazione del *cladding*
- ▶ k – numero d'onda ($2\pi/\lambda$)

Tipi di energia

- ▶ Energia guidata
- ▶ Energia irraggiante
- ▶ Energia evanescente

Fibre Ottiche



Notazioni

- ▶ n – indice di rifrazione
- ▶ n_0 – massimo di n
- ▶ n_{cl} – indice di rifrazione del *cladding*
- ▶ k – numero d'onda ($2\pi/\lambda$)

Tipi di energia

- ▶ Energia guidata
- ▶ Energia irraggiante
- ▶ Energia evanescente

Modello Matematico in 2-D e 3-D

Equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 n(\mathbf{x})^2 u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

2-D: n funzione pari,

$$n = \begin{cases} n_{co}(x_1) & \text{se } |x_1| \leq h, \\ n_{cl} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3-D: n a simmetria cilindrica rispetto a x_3 ,

$$n = \begin{cases} n_{co}(r) & \text{se } 0 \leq r \leq R, \\ n_{cl} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\text{dove } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Modello Matematico in 2-D e 3-D

Equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 n(\mathbf{x})^2 u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

2-D: n funzione pari,

$$n = \begin{cases} n_{co}(x_1) & \text{se } |x_1| \leq h, \\ n_{cl} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3-D: n a simmetria cilindrica rispetto a x_3 ,

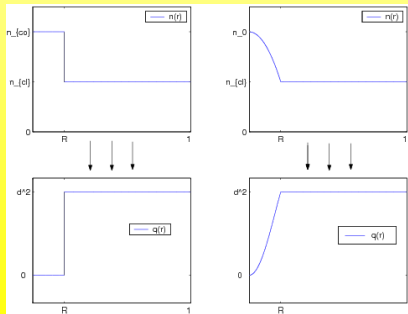
$$n = \begin{cases} n_{co}(r) & \text{se } 0 \leq r \leq R, \\ n_{cl} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$\text{dove } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Caso 2-D (Magnanini, Santosa. 2001)

$$\Delta u + k^2 n(x_1)^2 u = f \quad \xrightarrow{u = v(x_1, \lambda) e^{ik\beta x_2}} \quad v'' + [\lambda - q(x_1)]v = 0, \text{ in } \mathbb{R}.$$

Esempio:



- ▶ $v'(x_1, \lambda) = \frac{\partial v(x_1, \lambda)}{\partial x_1}$
- ▶ $n_0 = \max n(x_1)$
- ▶ $q(x_1) = k^2 [n_0^2 - n(x_1)^2]$
- ▶ $d^2 = k^2 (n_0^2 - n_{cl}^2)$
- ▶ $\lambda = k^2 (n_0^2 - \beta^2)$

Classificazione delle Soluzioni

I modi : Soluzioni dell'equazione di Helmholtz del tipo

$$v(x_1, \lambda)e^{ik\beta x_2}, \text{ con } \beta k = \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}.$$

- ▶ **guidati**: per $0 < \lambda \leq d^2$. La maggior parte dell'energia è contenuta all'interno della fibra (all'esterno tendono a zero esponenzialmente). Sono in numero *finito*.
- ▶ **irraggianti**: per $d^2 < \lambda \leq n_0^2 k^2$. L'energia non si concentra nel nucleo ma si propaga abbondantemente anche nel rivestimento.
- ▶ **evanescenti**: per $\lambda > n_0^2 k^2$. La *costante di propagazione* β diventa immaginaria. Questi modi hanno un decadimento di tipo esponenziale in una delle direzioni $x_2 \rightarrow \pm\infty$ ed una crescono esponenzialmente nell'altra.

Classificazione delle Soluzioni

I modi : Soluzioni dell'equazione di Helmholtz del tipo

$$v(x_1, \lambda)e^{ik\beta x_2}, \text{ con } \beta k = \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}.$$

- ▶ **guidati**: per $0 < \lambda \leq d^2$. La maggior parte dell'energia è contenuta all'interno della fibra (all'esterno tendono a zero esponenzialmente). Sono in numero *finito*.
- ▶ **irraggianti**: per $d^2 < \lambda \leq n_0^2 k^2$. L'energia non si concentra nel nucleo ma si propaga abbondantemente anche nel rivestimento.
- ▶ **evanescenti**: per $\lambda > n_0^2 k^2$. La *costante di propagazione* β diventa immaginaria. Questi modi hanno un decadimento di tipo esponenziale in una delle direzioni $x_2 \rightarrow \pm\infty$ ed una crescono esponenzialmente nell'altra.

Classificazione delle Soluzioni

I modi : Soluzioni dell'equazione di Helmholtz del tipo

$$v(x_1, \lambda) e^{ik\beta x_2}, \text{ con } \beta k = \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}.$$

- ▶ **guidati**: per $0 < \lambda \leq d^2$. La maggior parte dell'energia è contenuta all'interno della fibra (all'esterno tendono a zero esponenzialmente). Sono in numero *finito*.
- ▶ **irraggianti**: per $d^2 < \lambda \leq n_0^2 k^2$. L'energia non si concentra nel nucleo ma si propaga abbondantemente anche nel rivestimento.
- ▶ **evanescenti**: per $\lambda > n_0^2 k^2$. La costante di propagazione β diventa immaginaria. Questi modi hanno un decadimento di tipo esponenziale in una delle direzioni $x_2 \rightarrow \pm\infty$ ed una crescono esponenzialmente nell'altra.

Classificazione delle Soluzioni

I modi : Soluzioni dell'equazione di Helmholtz del tipo

$$v(x_1, \lambda)e^{ik\beta x_2}, \text{ con } \beta k = \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}.$$

- ▶ **guidati**: per $0 < \lambda \leq d^2$. La maggior parte dell'energia è contenuta all'interno della fibra (all'esterno tendono a zero esponenzialmente). Sono in numero *finito*.
- ▶ **irraggianti**: per $d^2 < \lambda \leq n_0^2 k^2$. L'energia non si concentra nel nucleo ma si propaga abbondantemente anche nel rivestimento.
- ▶ **evanescenti**: per $\lambda > n_0^2 k^2$. La *costante di propagazione* β diventa immaginaria. Questi modi hanno un decadimento di tipo esponenziale in una delle direzioni $x_2 \rightarrow \pm\infty$ ed una crescono esponenzialmente nell'altra.

Formula Risolutiva

Ogni soluzione dell'equazione di Helmholtz è sovrapposizione di modi guidati, irraggianti ed evanescenti:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y) f(y) dy,$$

dove

$$G(x, y) = \sum_{j \in \{s, a\}} \int_0^{\infty} \frac{e^{j|x_2 - y_2| \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}}}{2i \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}} v_j(x_1, \lambda) v_j(y_1, \lambda) d\rho_j(\lambda),$$

con

$$(d\rho_j, \eta) = \sum_{m=1}^{M_j} r_j^m \eta(\lambda_j^m) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{I}_j} \frac{\sqrt{\lambda - d_j^2}}{(\lambda - d_j^2) v_j(h, \lambda)^2 + d_j^2 (h, \lambda)^2} \eta(\lambda) d\lambda, \quad \forall \eta \in C_0^\infty([0, +\infty)).$$

Formula Risolutiva

Ogni soluzione dell'equazione di Helmholtz è sovrapposizione di modi guidati, irraggianti ed evanescenti:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x, y) f(y) dy,$$

dove

$$G(x, y) = \sum_{j \in \{s, a\}} \int_0^{\infty} \frac{e^{i|x_2 - y_2| \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}}}{2i \sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}} v_j(x_1, \lambda) v_j(y_1, \lambda) d\rho_j(\lambda),$$

con

$$\langle d\rho_j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{M_j} r_j^m \eta(\lambda_j^m) + \frac{1}{2\pi} \int_{d^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda - d^2}}{(\lambda - d^2) \phi_j(h, \lambda)^2 + \phi_j'(h, \lambda)^2} \eta(\lambda) d\lambda, \quad \forall \eta \in C_0^\infty([0, +\infty)).$$

Caso 3-D. (Alexandrov, Ciruolo. 2004)

Si sfrutta la simmetria cilindrica rispetto a x_3 (asse della fibra):

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = f \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta k x_3} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- ▶ Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende singolare l'equazione in $r = 0$, oltre che in $r = \infty$.
- ▶ Difficile adattare a questo caso il metodo utilizzato da M-S.
- ▶ Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- ▶ Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

Caso 3-D. (Alexandrov, Ciraolo. 2004)

Si sfrutta la simmetria cilindrica rispetto a x_3 (asse della fibra):

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = f \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta k x_3} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- ▶ Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende singolare l'equazione in $r = 0$, oltre che in $r = \infty$.
- ▶ Difficile adattare a questo caso il metodo utilizzato da M-S.
- ▶ Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- ▶ Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

Caso 3-D. (Alexandrov, Ciruolo. 2004)

Si sfrutta la simmetria cilindrica rispetto a x_3 (asse della fibra):

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = f \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta k x_3} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- ▶ Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende singolare l'equazione in $r = 0$, oltre che in $r = \infty$.
- ▶ Difficile adattare a questo caso il metodo utilizzato da M-S.
- ▶ Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- ▶ Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

Caso 3-D. (Alexandrov, Ciruolo. 2004)

Si sfrutta la simmetria cilindrica rispetto a x_3 (asse della fibra):

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = f \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta k x_3} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- ▶ Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende singolare l'equazione in $r = 0$, oltre che in $r = \infty$.
- ▶ Difficile adattare a questo caso il metodo utilizzato da M-S.
- ▶ Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- ▶ Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

Caso 3-D. (Alexandrov, Ciruolo. 2004)

Si sfrutta la simmetria cilindrica rispetto a x_3 (asse della fibra):

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = f \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta k x_3} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- ▶ Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende singolare l'equazione in $r = 0$, oltre che in $r = \infty$.
- ▶ Difficile adattare a questo caso il metodo utilizzato da M-S.
- ▶ Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- ▶ Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

Comportamento delle soluzioni in $r = 0$

Lemma. Se $q \in L^\infty(0, \infty)$, per m fissato, esiste una base di soluzioni $j_m(r, \lambda)$ e $y_m(r, \lambda)$ di

$$w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

tali che

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{j_m(r, \lambda)}{r^{|m|+1/2}} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{j'_m(r, \lambda)}{(|m|+1/2)r^{|m|-1/2}} = 1.$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{y_m(r, \lambda)}{r^{-|m|+1/2}} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{y'_m(r, \lambda)}{(-|m|+1/2)r^{-|m|-1/2}} = 1, \quad \text{if } |m| \geq 1,$$

o

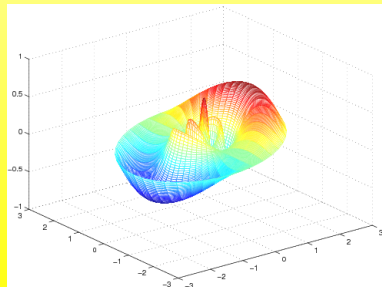
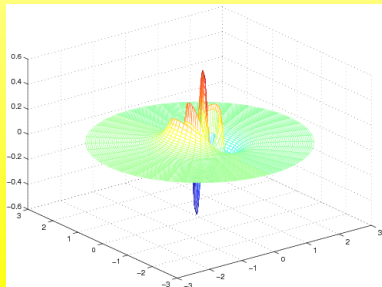
$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{y_m(r, \lambda)}{\sqrt{r} \ln r} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{y'_m(r, \lambda)}{\ln r / (2\sqrt{r})} = 1, \quad \text{if } m = 0.$$

Inoltre le funzioni $j_m(r, \lambda)$ e $j'_m(r, \lambda)$ sono analitiche in λ per r fissato.

Classificazione delle soluzioni

I **modi** corrispondono alle soluzioni limitate di (1). Come nel caso 2-D si ritrova la seguente classificazione:

- ▶ **guidati:** per $0 < \lambda \leq d^2$
- ▶ **irraggianti:** per $d^2 < \lambda \leq n_0^2 k^2$.
- ▶ **evanescenti:** per $\lambda > n_0^2 k^2$.



Teoria di Titchmarsh

A partire dalle soluzioni di (1) si riesce a costruire una misura positiva $\chi_m(\lambda)$ tale che, posto

$$G_m(\lambda) = \int_0^{\infty} j_m(r, \lambda) g(r) dr,$$

allora $\forall g \in L^2(0, \infty)$ si ha

$$g(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_m(r, \lambda) G_m(\lambda) d\chi_m(\lambda)$$

e

$$\int_0^{\infty} g(x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_m(\lambda)^2 d\chi_m(\lambda).$$

Teoria di Titchmarsh

A partire dalle soluzioni di (1) si riesce a costruire una misura positiva $\chi_m(\lambda)$ tale che, posto

$$G_m(\lambda) = \int_0^{\infty} j_m(r, \lambda) g(r) dr,$$

allora $\forall g \in L^2(0, \infty)$ si ha

$$g(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j_m(r, \lambda) G_m(\lambda) d\chi_m(\lambda)$$

e

$$\int_0^{\infty} g(x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_m(\lambda)^2 d\chi_m(\lambda).$$

Proprietà di $\chi_m(\lambda)$

- ▶ $\chi_m(\lambda) = 0$ per $\lambda \leq 0$.
- ▶ Per $\lambda \in (0, d^2]$, χ_m è costante a tratti, con discontinuità nei punti λ_m^k per i quali $j_m(\cdot, \lambda_m^k) \in L^2(0, \infty) \cap C^1(0, \infty)$. Si ha:

$$\chi_m(\lambda_m^k + 0) - \chi_m(\lambda_m^k - 0) = \frac{\pi}{\|j_m(\cdot, \lambda_m^k)\|_{L^2}^2}.$$

- ▶ Per $\lambda > d^2$, siano $c_m(\lambda)$ e $d_m(\lambda)$ tali che per $r \geq R$

$$j_m(r, \lambda) = c_m(\lambda)\sqrt{r}J_m(\sqrt{\lambda - d^2}r) + d_m(\lambda)\sqrt{r}Y_m(\sqrt{\lambda - d^2}r)$$

(J_m e Y_m funzioni di Bessel). Allora:

$$d\chi_m(\lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{d\lambda}{c_m(\lambda)^2 + d_m(\lambda)^2}.$$

Proprietà di $\chi_m(\lambda)$

- ▶ $\chi_m(\lambda) = 0$ per $\lambda \leq 0$.
- ▶ Per $\lambda \in (0, d^2]$, χ_m è costante a tratti, con discontinuità nei punti λ_m^k per i quali $j_m(\cdot, \lambda_m^k) \in L^2(0, \infty) \cap C^1(0, \infty)$. Si ha:

$$\chi_m(\lambda_m^k + 0) - \chi_m(\lambda_m^k - 0) = \frac{\pi}{\|j_m(\cdot, \lambda_m^k)\|_{L^2}^2}.$$

- ▶ Per $\lambda > d^2$, siano $c_m(\lambda)$ e $d_m(\lambda)$ tali che per $r \geq R$

$$j_m(r, \lambda) = c_m(\lambda) \sqrt{r} J_m(\sqrt{\lambda - d^2} r) + d_m(\lambda) \sqrt{r} Y_m(\sqrt{\lambda - d^2} r)$$

(J_m e Y_m funzioni di Bessel). Allora:

$$d\chi_m(\lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{d\lambda}{c_m(\lambda)^2 + d_m(\lambda)^2}.$$

Proprietà di $\chi_m(\lambda)$

- ▶ $\chi_m(\lambda) = 0$ per $\lambda \leq 0$.
- ▶ Per $\lambda \in (0, d^2]$, χ_m è costante a tratti, con discontinuità nei punti λ_m^k per i quali $j_m(\cdot, \lambda_m^k) \in L^2(0, \infty) \cap C^1(0, \infty)$. Si ha:

$$\chi_m(\lambda_m^k + 0) - \chi_m(\lambda_m^k - 0) = \frac{\pi}{\|j_m(\cdot, \lambda_m^k)\|_{L^2}^2}.$$

- ▶ Per $\lambda > d^2$, siano $c_m(\lambda)$ e $d_m(\lambda)$ tali che per $r \geq R$

$$j_m(r, \lambda) = c_m(\lambda)\sqrt{r}J_m(\sqrt{\lambda - d^2} r) + d_m(\lambda)\sqrt{r}Y_m(\sqrt{\lambda - d^2} r)$$

(J_m e Y_m funzioni di Bessel). Allora:

$$d\chi_m(\lambda) = \frac{\pi}{2} \frac{d\lambda}{c_m(\lambda)^2 + d_m(\lambda)^2}.$$

Formula risolutiva

$$u(r, \vartheta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} G(r, \vartheta, z; \rho, \varphi, \zeta) f(\rho, \varphi, \zeta) \rho d\varphi d\rho d\zeta,$$

dove

$$G(r, \rho; \vartheta, t; z, \zeta) =$$

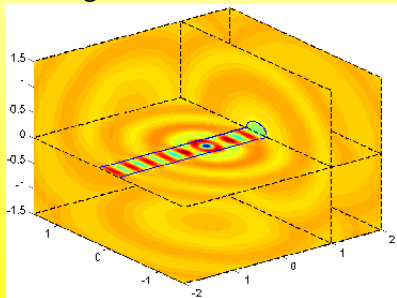
$$\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i|z-\zeta|\sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}}}{2i\sqrt{k^2 n_0^2 - \lambda}} e^{im(\vartheta-t)} j_m(\rho, \lambda) j_m(r, \lambda) d\chi_m(\lambda),$$

$$r, \rho > 0; \quad -\pi \leq \vartheta, t \leq \pi; \quad z, \zeta \in \mathbb{R}.$$

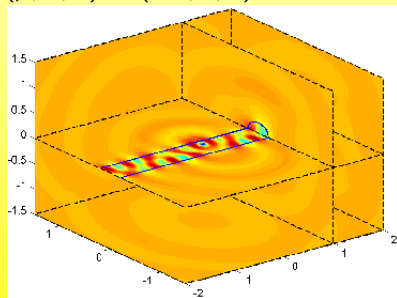
Conclusion: Ogni soluzione è una sovrapposizione di modi guidati ($0 < \lambda \leq d^2$), irraggianti ($d^2 < \lambda \leq k^2 n_0^2$) ed evanescenti ($\lambda > k^2 n_0^2$).

Esempi numerici.

Funzione di Green con sorgente nell'origine



Funzione di Green con sorgente $(\rho, \vartheta, z) = (0.1, 0, 0)$



Part II

Guide d'onda non rettilinee (Ciraolo, Magnanini)

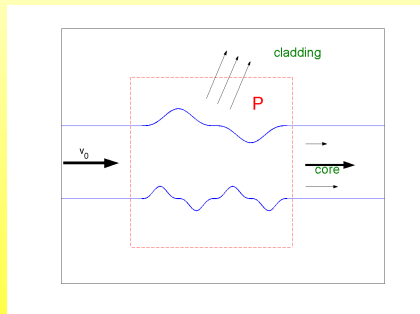
Motivazioni

Piccole imperfezioni nella guida danno origine a fenomeni di

- ▶ Disturbo nel segnale
- ▶ Perdita di energia



- ▶ Accoppiamento modi guidati
- ▶ Maggiore quantità di energia irraggiante ed evanescente



...non sempre sono fenomeni da evitare...

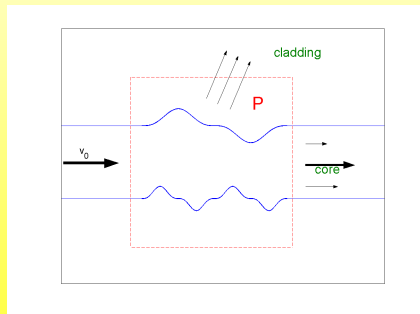
Motivazioni

Piccole imperfezioni nella guida danno origine a fenomeni di

- ▶ Disturbo nel segnale
- ▶ Perdita di energia



- ▶ Accoppiamento modi guidati
- ▶ Maggiore quantità di energia irraggiante ed evanescente



...non sempre sono fenomeni da evitare...

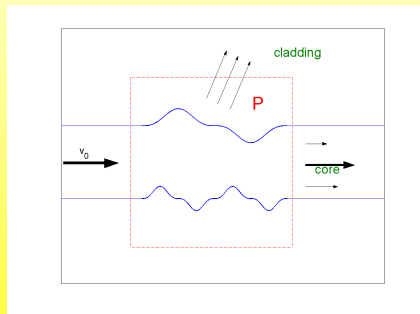
Motivazioni

Piccole imperfezioni nella guida danno origine a fenomeni di

- ▶ Disturbo nel segnale
- ▶ Perdita di energia



- ▶ Accoppiamento modi guidati
- ▶ Maggiore quantità di energia irraggiante ed evanescente



...non sempre sono fenomeni da evitare...

Mathematical Framework (in \mathbb{R}^2)

$$L_0 = \Delta + k^2 n_0^2(x_1), \quad L_\varepsilon = \Delta + k^2 n_\varepsilon(x_1, x_2).$$

Guide non rettilinee $\longrightarrow L_\varepsilon u = f$.

Rappresentando (formalmente) u e L_ε in serie di Neumann:

$$u = u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots; \quad L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots,$$

si ha

$$L_0 u_0 = f, \quad L_0 u_1 = -L_1 u_0, \dots, \quad L_0 u_j = -\sum_{r=0}^{j-1} L_{j-r} u_r, \dots$$

Ogni passo viene risolto sfruttando L_0^{-1} .

Mathematical Framework (in \mathbb{R}^2)

$$L_0 = \Delta + k^2 n_0^2(x_1), \quad L_\varepsilon = \Delta + k^2 n_\varepsilon(x_1, x_2).$$

Guide non rettilinee $\longrightarrow L_\varepsilon u = f$.

Rappresentando (formalmente) u e L_ε in serie di Neumann:

$$u = u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots; \quad L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots,$$

si ha

$$L_0 u_0 = f, \quad L_0 u_1 = -L_1 u_0, \dots, \quad L_0 u_j = -\sum_{r=0}^{j-1} L_{j-r} u_r, \dots$$

Ogni passo viene risolto sfruttando L_0^{-1} .

Mathematical Framework (in \mathbb{R}^2)

$$L_0 = \Delta + k^2 n_0^2(x_1), \quad L_\varepsilon = \Delta + k^2 n_\varepsilon(x_1, x_2).$$

Guide non rettilinee $\longrightarrow L_\varepsilon u = f$.

Rappresentando (formalmente) u e L_ε in serie di Neumann:

$$u = u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots; \quad L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots,$$

si ha

$$L_0 u_0 = f, \quad L_0 u_1 = -L_1 u_0, \dots, \quad L_0 u_j = -\sum_{r=0}^{j-1} L_{j-r} u_r, \dots$$

Ogni passo viene risolto sfruttando L_0^{-1} .

Esistenza delle soluzioni

Problema

$$L_\varepsilon u = f$$

$$\downarrow$$

$$L_0 u = f + (L_0 - L_\varepsilon)u$$

$$\downarrow$$

$$u = L_0^{-1} f + \varepsilon L_0^{-1} \left(\frac{L_0 - L_\varepsilon}{\varepsilon} \right) u.$$

Strategia

- ▶ Trovare X_1 e X_2 tali che siano continui

$$L_0^{-1} : X_2 \rightarrow X_1,$$

$$\frac{L_0 - L_\varepsilon}{\varepsilon} : X_1 \rightarrow X_2.$$

- ▶ $\varepsilon > 0$ suff. piccolo \rightarrow dal Teorema delle contrazioni segue l'esistenza delle soluzioni

Spazi utilizzati: $\begin{cases} X_1 = H^2(\mathbb{R}^2, \mu), \\ X_2 = L^2(\mathbb{R}^2, \mu^{-1}). \end{cases}$ dove $\mu(x) = \frac{16}{(4 + |x|^2)^2}$.

Esistenza delle soluzioni

Problema

$$L_\varepsilon u = f$$

$$\downarrow$$

$$L_0 u = f + (L_0 - L_\varepsilon)u$$

$$\downarrow$$

$$u = L_0^{-1} f + \varepsilon L_0^{-1} \left(\frac{L_0 - L_\varepsilon}{\varepsilon} \right) u.$$

Strategia

- Trovare X_1 e X_2 tali che siano continui

$$L_0^{-1} : X_2 \rightarrow X_1,$$

$$\frac{L_0 - L_\varepsilon}{\varepsilon} : X_1 \rightarrow X_2.$$

- $\varepsilon > 0$ suff. piccolo \rightarrow dal Teorema delle contrazioni segue l'esistenza delle soluzioni.

Spazi utilizzati: $\begin{cases} X_1 = H^2(\mathbb{R}^2, \mu), \\ X_2 = L^2(\mathbb{R}^2, \mu^{-1}) \end{cases}$ dove $\mu(x) = \frac{16}{(4 + |x|^2)^2}$.

Esistenza delle soluzioni

Problema

$$L_\varepsilon u = f$$

$$\downarrow$$

$$L_0 u = f + (L_0 - L_\varepsilon)u$$

$$\downarrow$$

$$u = L_0^{-1} f + \varepsilon L_0^{-1} \left(\frac{L_0 - L_\varepsilon}{\varepsilon} \right) u.$$

Strategia

- ▶ Trovare X_1 e X_2 tali che siano continui

$$L_0^{-1} : X_2 \rightarrow X_1,$$

$$\frac{L_0 - L_\varepsilon}{\varepsilon} : X_1 \rightarrow X_2.$$

- ▶ $\varepsilon > 0$ suff. piccolo \rightarrow dal Teorema delle contrazioni segue l'esistenza delle soluzioni.

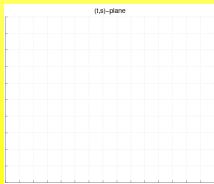
Spazi utilizzati: $\begin{cases} X_1 = H^2(\mathbb{R}^2, \mu), \\ X_2 = L^2(\mathbb{R}^2, \mu^{-1}), \end{cases}$ dove $\mu(x) = \frac{16}{(4 + |x|^2)^2}$.

Simulazioni numeriche

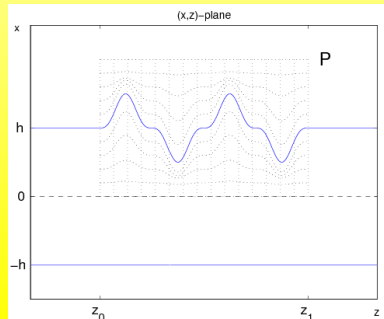
$$\Gamma_\varepsilon(t, s) = \begin{cases} x = t + \varepsilon T(t)S(s), \\ z = s, \end{cases}$$

$$\tilde{L}_\varepsilon v = g$$

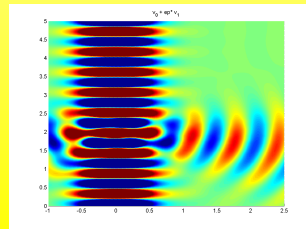
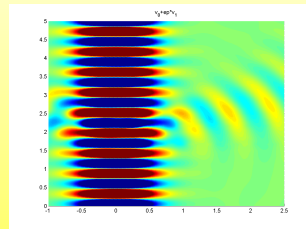
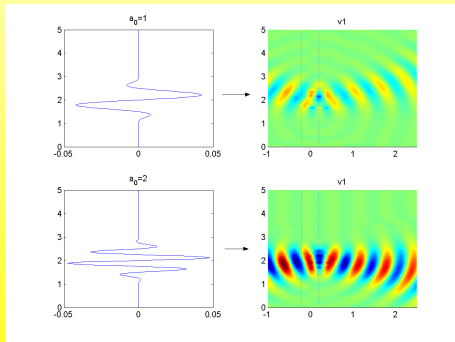
$$\Delta u + k^2 n(x, z)^2 u = f$$



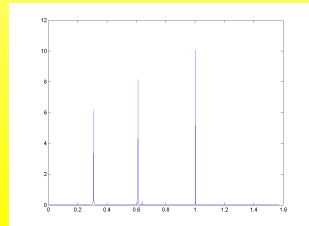
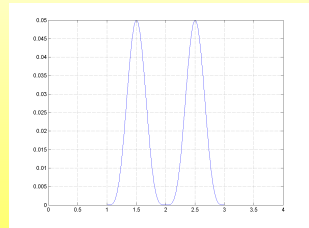
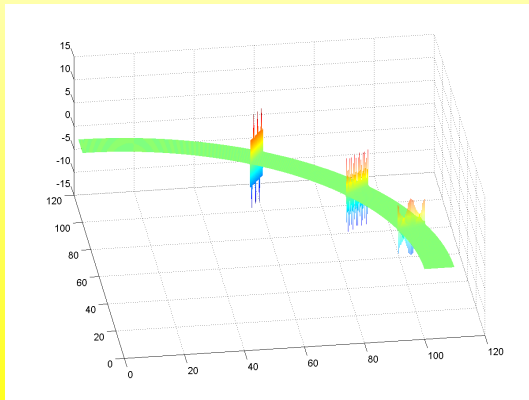
$$(x, z) = \Gamma_\varepsilon(t, s) \rightarrow$$



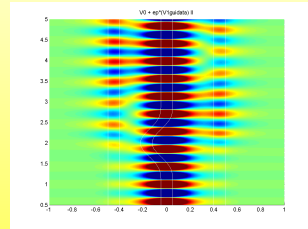
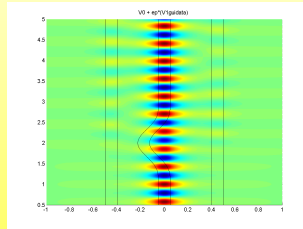
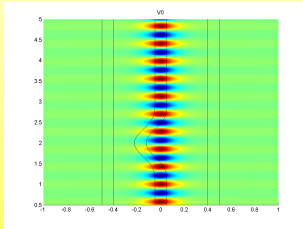
Near Field



Far Field



Accoppiamento dei modi



Dettagli parte guidata di v_1

