

Condizione di radiazione e unicità per la propagazione guidata di onde

Giulio Ciruolo

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

In collaborazione con Prof. Rolando Magnanini.

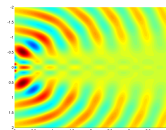
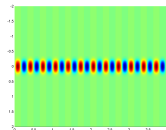
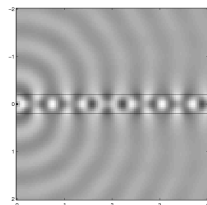
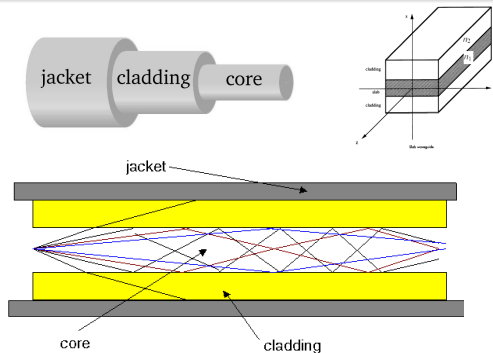
Firenze, Marzo 2007

Outline

- 1 Guide d'onda rettilinee. Una funzione di Green
 - Introduzione al problema
 - Guide d'onda 2-D
 - Teoria di Titchmarsh
 - Caso 3-D. Fibre ottiche
- 2 Unicità delle soluzioni
 - Motivazioni
 - Condizione di radiazione di Sommerfeld
 - Un teorema di unicità delle soluzioni
 - Verifica
- 3 Guide d'onda non rettilinee

UNA FUNZIONE DI GREEN PER GUIDE D'ONDA RETTILINEE

Guide d'onda e fibre ottiche



Tipi di energia

- Energia guidata
- Energia irraggiata
- Energia evanescente

Modello matematico in 2-D e 3-D

Equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 n(\mathbf{x})^2 u = f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N.$$

Notazioni

- n – indice di rifrazione
- n_{cl} – indice di rifrazione del cladding (costante)
- k – numero d'onda ($2\pi/\lambda$)

2-D

n funzione pari,

$$n = \begin{cases} n_{co}(x) & \text{se } |x| \leq h, \\ n_{cl} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3-D

n a simmetria assiale rispetto a z ,

$$n = \begin{cases} n_{co}(r) & \text{if } 0 \leq r \leq R, \\ n_{cl} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Verso una funzione di Green

- Desideriamo 'trasformare' l'equazione di Helmholtz. Per esempio, nel caso 2-D:

$$\Delta u + k^2 n(x)^2 u = f, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2$$

- n non è costante nella variabile $x \Rightarrow$ trasformata di Fourier?
- n è costante nella variabile z , ma i modi guidati oscillano senza svanire all'infinito \Rightarrow trasformata di Fourier?
- **Abbiamo bisogno di una trasformata 'ad hoc' che tenga conto di $n(x)$**
 \Rightarrow **teoria di Titchmarsh.**

Verso una funzione di Green II.

$$\Delta u(x, z) + k^2 n(x)^2 u(x, z) = f$$

$$\Delta u(x, z) + [k^2 n_*^2 - q(x)] u(x, z) = f$$

Moltiplicando per v e integrando per parti:

$$U_{zz}(z, \lambda) + (k^2 n_*^2 - \lambda) U(z, \lambda) = F$$

$$n_* = \max n(x)$$

$$q(x) = k^2 [n_*^2 - n(x)^2]$$

$$U(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, z) v(x, \lambda) dx,$$

v soluzione di $v'' + (\lambda - q)v = 0$.

$$U(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|z-\zeta|\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}}}{2i\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}} F(\zeta, \lambda) d\zeta$$

$$\text{Formula d'inversione} \Rightarrow u(x, z) = \int_0^{+\infty} U(z, \lambda) v(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

$$\Rightarrow u(x, z) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x, z; \xi, \zeta) f(\xi, \zeta).$$

Verso una funzione di Green II.

$$\Delta u(x, z) + k^2 n(x)^2 u(x, z) = f$$

$$\Delta u(x, z) + [k^2 n_*^2 - q(x)] u(x, z) = f$$

Moltiplicando per v e integrando per parti:

$$U_{zz}(z, \lambda) + (k^2 n_*^2 - \lambda) U(z, \lambda) = F$$

$$n_* = \max n(x)$$

$$q(x) = k^2 [n_*^2 - n(x)^2]$$

$$U(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, z) v(x, \lambda) dx,$$

v soluzione di $v'' + (\lambda - q)v = 0$.

$$U(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|z-\zeta|\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}}}{2i\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}} F(\zeta, \lambda) d\zeta$$

$$\text{Formula d'inversione} \Rightarrow u(x, z) = \int_0^{+\infty} U(z, \lambda) v(x, \lambda) d\rho(\lambda),$$

$$\Rightarrow u(x, z) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x, z; \xi, \zeta) f(\xi, \zeta).$$

Guide d'onda 2-D. *Magnanini – Santosa, 2001*

$$\Delta u + k^2 n(x)^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u=v(x,\lambda)e^{i\beta z}} \quad v'' + [\lambda - q(x)]v = 0, \text{ in } \mathbb{R}.$$

- $\bullet \quad v'(x, \lambda) = \frac{\partial v(x, \lambda)}{\partial x}$
- $\bullet \quad q(x) = k^2[n_*^2 - n(x)^2]$
- $\bullet \quad \lambda = k^2 n_*^2 - \beta^2$
- $\bullet \quad n_* = \max n(x)$
- $\bullet \quad d^2 = k^2(n_*^2 - n_{cl}^2)$
- $\bullet \quad Q = \sqrt{\lambda - d^2}$

Soluzioni. $j = s, a$.

$$v_j(x, \lambda) = \begin{cases} \phi_j(h, \lambda) \cos Q(x - h) + \frac{\phi_j'(h, \lambda)}{Q} \sin Q(x - h), & x > h, \\ \phi_j(x, \lambda), & |x| \leq h, \\ \phi_j(-h, \lambda) \cos Q(x + h) + \frac{\phi_j'(-h, \lambda)}{Q} \sin Q(x + h), & x < -h, \end{cases}$$

Condizioni iniziali e di salto

$$\begin{array}{lll} \phi_s(0, \lambda) = 1, & \phi_s'(0, \lambda) = 0, & [v_j(\pm h, \lambda)] = 0, \\ \phi_a(0, \lambda) = 0, & \phi_a'(0, \lambda) = \sqrt{\lambda}, & [v_j'(\pm h, \lambda)] = 0. \end{array}$$

Guide d'onda 2-D. *Maganini – Santosa, 2001*

$$\Delta u + k^2 n(x)^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u=v(x,\lambda)e^{i\beta z}} \quad v'' + [\lambda - q(x)]v = 0, \text{ in } \mathbb{R}.$$

- $\bullet \quad v'(x, \lambda) = \frac{\partial v(x, \lambda)}{\partial x}$
- $\bullet \quad q(x) = k^2[n_*^2 - n(x)^2]$
- $\bullet \quad \lambda = k^2 n_*^2 - \beta^2$
- $\bullet \quad n_* = \max n(x)$
- $\bullet \quad d^2 = k^2(n_*^2 - n_{cl}^2)$
- $\bullet \quad Q = \sqrt{\lambda - d^2}$

Soluzioni. $j = s, a$.

$$v_j(x, \lambda) = \begin{cases} \phi_j(h, \lambda) \cos Q(x - h) + \frac{\phi_j'(h, \lambda)}{Q} \sin Q(x - h), & x > h, \\ \phi_j(x, \lambda), & |x| \leq h, \\ \phi_j(-h, \lambda) \cos Q(x + h) + \frac{\phi_j'(-h, \lambda)}{Q} \sin Q(x + h), & x < -h, \end{cases}$$

Condizioni iniziali e di salto

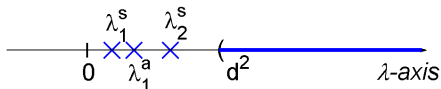
$$\begin{array}{lll} \phi_s(0, \lambda) = 1, & \phi_s'(0, \lambda) = 0, & [v_j(\pm h, \lambda)] = 0, \\ \phi_a(0, \lambda) = 0, & \phi_a'(0, \lambda) = \sqrt{\lambda}, & [v_j'(\pm h, \lambda)] = 0. \end{array}$$

Autovalori e autofunzioni

$$v'' + [\lambda - q(x)]v = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$v_j(x, \lambda) = \begin{cases} \phi_j(h, \lambda) \cos Q(x - h) + \frac{\phi_j'(h, \lambda)}{Q} \sin Q(x - h), & x > h, \\ \phi_j(x, \lambda), & |x| \leq h, \\ \phi_j(-h, \lambda) \cos Q(x + h) + \frac{\phi_j'(-h, \lambda)}{Q} \sin Q(x + h), & x < -h, \end{cases}$$

$$Q = \sqrt{\lambda - d^2}.$$



- $\lambda > d^2$. $v_j(x, \lambda)$ limitate.
- $0 < \lambda < d^2$. $v_j(x, \lambda)$ limitate se $\sqrt{d^2 - \lambda} \phi_j(h, \lambda) + \phi_j'(h, \lambda) = 0$.
 Numero finito di radici $\{\lambda_m^j\}_{m=1}^{M_j}$.
 Le $v_j(x, \lambda_m^j)$ corrispondenti tendono a zero esponenzialmente per $|x| \rightarrow +\infty$.

Classificazione delle soluzioni

Modi

I modi sono le soluzioni dell'equazione di Helmholtz della forma $v(x, \lambda)e^{i\beta z}$, con $\beta = \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}$.

- **guidati**: per $0 < \lambda < d^2$. I modi guidati si propagano principalmente all'interno del core e svaniscono esponenzialmente all'esterno. Sono un numero finito.
- **irraggianti**: per $d^2 < \lambda \leq n_*^2 k^2$. L'energia non si localizza all'interno del core ma si propaga in modo significativo all'esterno.
- **evanescenti**: per $\lambda > n_*^2 k^2$. La *costante di propagazione* β diventa immaginaria. Questi modi hanno un comportamento di tipo esponenziale nella direzione z .

Classificazione delle soluzioni

Modi

I modi sono le soluzioni dell'equazione di Helmholtz della forma $v(x, \lambda)e^{i\beta z}$, con $\beta = \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}$.

- **guidati**: per $0 < \lambda < d^2$. I modi guidati si propagano principalmente all'interno del core e svaniscono esponenzialmente all'esterno. Sono un numero finito.
- **irraggianti**: per $d^2 < \lambda \leq n_*^2 k^2$. L'energia non si localizza all'interno del core ma si propaga in modo significativo all'esterno.
- **evanescenti**: per $\lambda > n_*^2 k^2$. La *costante di propagazione* β diventa immaginaria. Questi modi hanno un comportamento di tipo esponenziale nella direzione z .

Classificazione delle soluzioni

Modi

I modi sono le soluzioni dell'equazione di Helmholtz della forma $v(x, \lambda)e^{i\beta z}$, con $\beta = \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}$.

- **guidati**: per $0 < \lambda < d^2$. I modi guidati si propagano principalmente all'interno del core e svaniscono esponenzialmente all'esterno. Sono un numero finito.
- **irraggianti**: per $d^2 < \lambda \leq n_*^2 k^2$. L'energia non si localizza all'interno del core ma si propaga in modo significativo all'esterno.
- **evanescenti**: per $\lambda > n_*^2 k^2$. La *costante di propagazione* β diventa immaginaria. Questi modi hanno un comportamento di tipo esponenziale nella direzione z .

Formula di risoluzione

M-S trovano una soluzione (nel senso delle distribuzioni) dell'equazione di Helmholtz come sovrapposizione di modi guidati, irraggianti ed evanescenti:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x, z; \xi, \zeta) f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

dove

$$G(x, z; \xi, \zeta) = \sum_{j \in \{s, a\}} \int_0^{\infty} \frac{e^{j|z-\zeta|\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}}}{2i\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}} v_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) d\rho^j(\lambda),$$

con

$$\langle d\rho^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{M_j} r_j^m \eta(\lambda_j^m) + \frac{1}{2\pi} \int_{d^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda - d^2}}{(\lambda - d^2) \phi_j(h, \lambda)^2 + \phi_j'(h, \lambda)^2} \eta(\lambda) d\lambda, \quad \forall \eta \in C_0^\infty([0, +\infty)).$$

Formula di risoluzione

M-S trovano una soluzione (nel senso delle distribuzioni) dell'equazione di Helmholtz come sovrapposizione di modi guidati, irraggianti ed evanescenti:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G(x, z; \xi, \zeta) f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

dove

$$G(x, z; \xi, \zeta) = \sum_{j \in \{s, a\}} \int_0^{\infty} \frac{e^{i|z-\zeta|\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}}}{2i\sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda}} v_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) d\rho^j(\lambda),$$

con

$$\langle d\rho^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{M_j} r_j^m \eta(\lambda_j^m) + \frac{1}{2\pi} \int_{d^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda - d^2}}{(\lambda - d^2) \phi_j(h, \lambda)^2 + \phi_j'(h, \lambda)^2} \eta(\lambda) d\lambda, \quad \forall \eta \in C_0^\infty([0, +\infty)).$$

Alcuni dettagli

- M-S trovano i pesi $d\rho^j(\lambda)$ attraverso un processo di limite dove si approssima il problema su \mathbb{R}^2 con una striscia di larghezza $2t$ imponendo condizioni di Dirichlet sul bordo.
- Dalla teoria di Sturm-Liouville esistono un'infinità numerabile di autovalori $\{\lambda_{m,t}^j\}_{m \in \mathbb{N}}$ che verificano $v_j(t, \lambda_{m,t}^j) = 0$, cioè:

$$\phi_j'(h, \lambda) \tan[(t-h)\sqrt{\lambda-d^2}] + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{\lambda-d^2} = 0.$$

- Se $\lambda_{m,t}^j \in (0, d^2)$ si ha che:

$$\phi_j'(h, \lambda) \tanh[(t-h)\sqrt{d^2-\lambda}] + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{d^2-\lambda} = 0,$$

$$\text{e } \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m,t}^j = \lambda_m^j \text{ (le soluzioni di } \phi_j'(h, \lambda) + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{d^2-\lambda} = 0.)$$

- Se $\lambda_{m,t}^j > d^2$, si ha che $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m,t}^j = d^2$.

Alcuni dettagli

- M-S trovano i pesi $d\rho^j(\lambda)$ attraverso un processo di limite dove si approssima il problema su \mathbb{R}^2 con una striscia di larghezza $2t$ imponendo condizioni di Dirichlet sul bordo.
- Dalla teoria di Sturm-Liouville esistono un'infinità numerabile di autovalori $\{\lambda_{m,t}^j\}_{m \in \mathbb{N}}$ che verificano $v_j(t, \lambda_{m,t}^j) = 0$, cioè:

$$\phi_j'(h, \lambda) \tan[(t-h)\sqrt{\lambda-d^2}] + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{\lambda-d^2} = 0.$$

- Se $\lambda_{m,t}^j \in (0, d^2)$ si ha che:

$$\phi_j'(h, \lambda) \tanh[(t-h)\sqrt{d^2-\lambda}] + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{d^2-\lambda} = 0,$$

e $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m,t}^j = \lambda_m^j$ (le soluzioni di $\phi_j'(h, \lambda) + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{d^2-\lambda} = 0$.)

- Se $\lambda_{m,t}^j > d^2$, si ha che $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m,t}^j = d^2$.

Alcuni dettagli

- M-S trovano i pesi $d\rho^j(\lambda)$ attraverso un processo di limite dove si approssima il problema su \mathbb{R}^2 con una striscia di larghezza $2t$ imponendo condizioni di Dirichlet sul bordo.
- Dalla teoria di Sturm-Liouville esistono un'infinità numerabile di autovalori $\{\lambda_{m,t}^j\}_{m \in \mathbb{N}}$ che verificano $v_j(t, \lambda_{m,t}^j) = 0$, cioè:

$$\phi_j'(h, \lambda) \tan[(t-h)\sqrt{\lambda-d^2}] + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{\lambda-d^2} = 0.$$

- Se $\lambda_{m,t}^j \in (0, d^2)$ si ha che:

$$\phi_j'(h, \lambda) \tanh[(t-h)\sqrt{d^2-\lambda}] + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{d^2-\lambda} = 0,$$

e $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m,t}^j = \lambda_m^j$ (le soluzioni di $\phi_j'(h, \lambda) + \phi_j(h, \lambda) \sqrt{d^2-\lambda} = 0$.)

- Se $\lambda_{m,t}^j > d^2$, si ha che $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m,t}^j = d^2$.

Calcolo di $d\rho^j(\lambda)$

- Sturm-Liouville sulla striscia: $f(x) = \sum_{j \in \{s,a\}} \int_0^{+\infty} F_t^j(\lambda) v_j(x, \lambda) d\rho_t^j(\lambda)$,

con $F_t^j(\lambda) = \int_{-t}^t f(x) v_j(x, \lambda) dx$ e

$$\langle d\rho_t^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\eta(\lambda_{m,t}^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_{m,t}^j)\|_{L^2(-t,t)}^2}, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

- $t \rightarrow \infty$ e si ottiene $f(x) = \sum_{j \in \{s,a\}} \int_0^{+\infty} F^j(\lambda) v_j(x, \lambda) d\rho^j(\lambda)$,

con $F^j(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) v_j(x, \lambda) dx$

$$\text{e } \langle d\rho^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{M_j} \frac{\eta(\lambda_m^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_m^j)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{d^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda-d^2}}{(\lambda-d^2)\phi_j(h,\lambda)^2 + \phi_j'(h,\lambda)^2} \eta(\lambda) d\lambda.$$

- Nel calcolo di $d\rho^j(\lambda)$ si sfrutta la conoscenza degli zeri delle funzioni seno e coseno.

Calcolo di $d\rho^j(\lambda)$

- Sturm-Liouville sulla striscia: $f(x) = \sum_{j \in \{s,a\}} \int_0^{+\infty} F_t^j(\lambda) v_j(x, \lambda) d\rho_t^j(\lambda)$,

con $F_t^j(\lambda) = \int_{-t}^t f(x) v_j(x, \lambda) dx$ e

$$\langle d\rho_t^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\eta(\lambda_{m,t}^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_{m,t}^j)\|_{L^2(-t,t)}^2}, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

- $t \rightarrow \infty$ e si ottiene $f(x) = \sum_{j \in \{s,a\}} \int_0^{+\infty} F^j(\lambda) v_j(x, \lambda) d\rho^j(\lambda)$,

con $F^j(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) v_j(x, \lambda) dx$

$$\text{e } \langle d\rho^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{M_j} \frac{\eta(\lambda_m^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_m^j)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{d^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda-d^2}}{(\lambda-d^2)\phi_j(h,\lambda)^2 + \phi_j'(h,\lambda)^2} \eta(\lambda) d\lambda.$$

- Nel calcolo di $d\rho^j(\lambda)$ si sfrutta la conoscenza degli zeri delle funzioni seno e coseno.

Calcolo di $d\rho^j(\lambda)$

- Sturm-Liouville sulla striscia: $f(x) = \sum_{j \in \{s,a\}} \int_0^{+\infty} F_t^j(\lambda) v_j(x, \lambda) d\rho_t^j(\lambda)$,

$$\text{con } F_t^j(\lambda) = \int_{-t}^t f(x) v_j(x, \lambda) dx \text{ e}$$

$$\langle d\rho_t^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\eta(\lambda_{m,t}^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_{m,t}^j)\|_{L^2(-t,t)}^2}, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

- $t \rightarrow \infty$ e si ottiene $f(x) = \sum_{j \in \{s,a\}} \int_0^{+\infty} F^j(\lambda) v_j(x, \lambda) d\rho^j(\lambda)$,

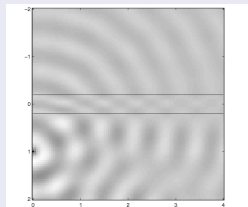
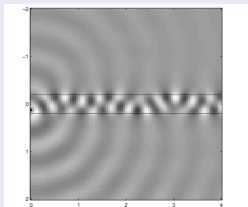
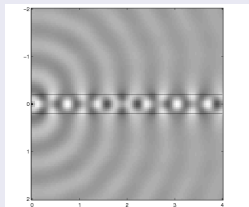
$$\text{con } F^j(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) v_j(x, \lambda) dx$$

$$\text{e } \langle d\rho^j, \eta \rangle = \sum_{m=1}^{M_j} \frac{\eta(\lambda_m^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_m^j)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{d^2}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda-d^2}}{(\lambda-d^2)\phi_j(h,\lambda)^2 + \phi_j'(h,\lambda)^2} \eta(\lambda) d\lambda.$$

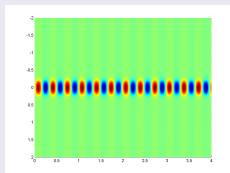
- Nel calcolo di $d\rho^j(\lambda)$ si sfrutta la conoscenza degli zeri delle funzioni seno e coseno.

Esempi numerici

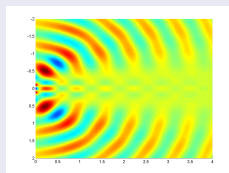
Parte reale della funzione di Green



Parte reale di un modo guidato



Parte reale di G^{rad}



2-D vs 3-D

Utilizzando la simmetria cilindrica rispetto all'asse z (l'asse delle fibre), troviamo:

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta kz} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende l'equazione singolare in $r = 0$, oltre che a $r = \infty$.
- Difficoltà tecniche nell'adattare il metodo utilizzato da M-S.
- Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

2-D vs 3-D

Utilizzando la simmetria cilindrica rispetto all'asse z (l'asse delle fibre), troviamo:

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta kz} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende l'equazione singolare in $r = 0$, oltre che a $r = \infty$.
- Difficoltà tecniche nell'adattare il metodo utilizzato da M-S.
- Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

2-D vs 3-D

Utilizzando la simmetria cilindrica rispetto all'asse z (l'asse delle fibra), troviamo:

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta kz} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende l'equazione singolare in $r = 0$, oltre che a $r = \infty$.
- Difficoltà tecniche nell'adattare il metodo utilizzato da M-S.
- Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

2-D vs 3-D

Utilizzando la simmetria cilindrica rispetto all'asse z (l'asse delle fibre), troviamo:

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta kz} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende l'equazione singolare in $r = 0$, oltre che a $r = \infty$.
- Difficoltà tecniche nell'adattare il metodo utilizzato da M-S.
- Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

2-D vs 3-D

Utilizzando la simmetria cilindrica rispetto all'asse z (l'asse delle fibre), troviamo:

$$\Delta u + k^2 n(r)^2 u = 0 \quad \xrightarrow{u = e^{i\beta kz} e^{im\vartheta} \frac{w(r)}{\sqrt{r}}} \quad w'' + \left[\lambda - q(r) - \frac{m^2 - 1/4}{r^2} \right] w = 0, \quad r > 0.$$

Differenze con il caso 2-D

- Il termine $\frac{m^2 - 1/4}{r^2}$, rende l'equazione singolare in $r = 0$, oltre che a $r = \infty$.
- Difficoltà tecniche nell'adattare il metodo utilizzato da M-S.
- Necessario uno studio del comportamento delle soluzioni in $r = 0$.
- Si utilizza la teoria di Titchmarsh sui problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari (non immediata).

Problemi agli autovalori per operatori differenziali singolari. Titchmarsh 1946.

Siano $\varphi_1(x, \ell)$ e $\varphi_2(x, \ell)$ soluzioni di

$$-(p(x)y')' + Q(x)y = \ell y, \quad x \in J, \ell \in \mathbb{C},$$

con J un intervallo di \mathbb{R} , p assolutamente continuo $Q \in L^1_{loc}(J)$,
che verificano

$$\begin{aligned} \varphi_1(R, \ell) &= 0, & \varphi'_1(R, \ell) &= -1, \\ \varphi_2(R, \ell) &= 1, & \varphi'_2(R, \ell) &= 0. \end{aligned}$$

con $R \in J$ fissato. Siano $g \in L^2(J)$ e

$$\Gamma_1(\ell) = \int_J \varphi_1(x, \ell) g(x) dx, \quad \Gamma_2(\ell) = \int_J \varphi_2(x, \ell) g(x) dx.$$

Esistono $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$ e $\zeta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tali che

Formula d'inversione

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \varphi_1(x, \lambda) \Gamma_1(\lambda) d\xi(\lambda) + \varphi_1(x, \lambda) \Gamma_2(\lambda) d\eta(\lambda) \\ + \varphi_2(x, \lambda) \Gamma_1(\lambda) d\eta(\lambda) + \varphi_2(x, \lambda) \Gamma_2(\lambda) d\zeta(\lambda) \}$$

Identità di Parseval

$$\int_J g(x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \Gamma_1(\lambda)^2 d\xi(\lambda) \\ + 2\Gamma_1(\lambda)\Gamma_2(\lambda) d\eta(\lambda) + \Gamma_2(\lambda)^2 d\zeta(\lambda) \}.$$

Esempi

$$-(p(x)y')' + Q(x)y = \lambda y, \quad x \in J.$$

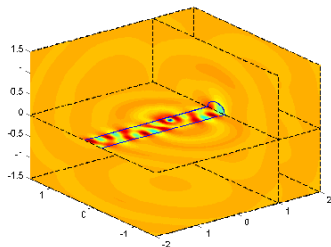
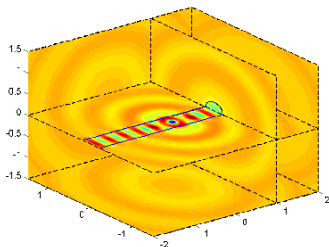
- *Fourier transform* per $p = 1$, $Q(x) = 0$, $J = \mathbb{R}$.
- *Hermite expansion* per $p = 1$, $Q = x^2$, $J = \mathbb{R}$.
- *Hänkel Transform* per $p = 1$, $Q = \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$, $J = (0, +\infty)$, con $\nu \in \mathbb{Z}$.

Riferimenti:

- TITCHMARSH, *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations*. 1946.
- CODDINGTON – LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, 1955.

Caso 3-D. Fibre ottiche. *Alexandrov – Ciruolo, 2004*

Utilizzando la teoria di Titchmarsh si ottengono risultati analoghi a quelli 2-D, cioè una funzione di Green che è sovrapposizione di modi guidati, irraggianti ed evanescenti.



Unicità delle soluzioni

Motivazioni

Abbiamo una *buona soluzione*:

$$G = G^g + G^r + G^e = \sum \dots + \int_{d^2}^{k^2 n_*^2} \dots + \int_{k^2 n_*^2}^{\infty} \dots$$

ma...

- È unica? Sotto quali condizioni al contorno?
- È quella fisicamente significativa?

Motivazioni

Abbiamo una *buona soluzione*:

$$G = G^g + G^r + G^e = \sum \dots + \int_{d^2}^{k^2 n_*^2} \dots + \int_{k^2 n_*^2}^{\infty} \dots$$

ma...

- È unica? Sotto quali condizioni al contorno?
- È quella fisicamente significativa?

Condizione di radiazione di Sommerfeld

L'equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = f \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

ha due soluzioni che tendono a zero all'infinito, rappresentanti la radiazione uscente ed entrante.

Funzioni di Green

$$-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr), \quad N = 2;$$

$$-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad N = 3;$$

r variabile radiale.

$N=3$. Equazione delle onde

$$\Delta w - w_{tt} = -\delta(\mathbf{x}, t)$$

ha le soluzioni

$$\frac{e^{-ik(t-r)}}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-ik(t+r)}}{4\pi r}.$$

$$\xrightarrow{w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{ikt}}$$

Equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = -\delta(\mathbf{x})$$

ha le soluzioni

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}.$$

Unicità. Condizione di radiazione di Sommerfeld (1912)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) = 0 \text{ uniformemente.}$$

Condizione di radiazione di Sommerfeld

L'equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = f \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

ha due soluzioni che tendono a zero all'infinito, rappresentanti la radiazione uscente ed entrante.

Funzioni di Green

$$-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr), \quad N = 2;$$

$$-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad N = 3;$$

r variabile radiale.

$N=3$. Equazione delle onde

$$\Delta w - w_{tt} = -\delta(\mathbf{x}, t)$$

ha le soluzioni

$$\frac{e^{-ik(t-r)}}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-ik(t+r)}}{4\pi r}.$$

$$\xrightarrow{w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{ikt}}$$

Equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = -\delta(\mathbf{x})$$

ha le soluzioni

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}.$$

Unicità. Condizione di radiazione di Sommerfeld (1912)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - ik u \right) = 0 \text{ uniformemente.}$$

Condizione di radiazione di Sommerfeld

L'equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = f \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

ha due soluzioni che tendono a zero all'infinito, rappresentanti la radiazione uscente ed entrante.

Funzioni di Green

$$-\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr), \quad N = 2;$$

$$-\frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad N = 3;$$

r variabile radiale.

$N=3$. Equazione delle onde

$$\Delta w - w_{tt} = -\delta(\mathbf{x}, t)$$

ha le soluzioni

$$\frac{e^{-ik(t-r)}}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-ik(t+r)}}{4\pi r}.$$

$$\xrightarrow{w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}) e^{ikt}}$$

Equazione di Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = -\delta(\mathbf{x})$$

ha le soluzioni

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}.$$

Unicità. Condizione di radiazione di Sommerfeld (1912)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \text{ uniformemente.}$$

Condizione di radiazione di Sommerfeld. Generalizzazioni

Unicità di $\Delta u + k^2 n(\mathbf{x})^2 u = f$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$.

- $n \equiv 1$ all'esterno di un compatto:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\sigma = 0,$$

o

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 d\mathbf{x} < +\infty.$$

- $n(\mathbf{x}) \rightarrow n_\infty(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$: $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_{B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - ikn_\infty u \right|^2 d\mathbf{x} = 0.$

(cfr. Magnus, Rellich, Miranker, Jäger & Saitō, Eidus, Zhang, Perthame & Vega...)

Sommerfeld vs guide d'onda

Problemi

- n non è costante all'esterno di un compatto.
- Jäger & Saitō.
- Spettro puntuale \rightarrow condizione di radiazione di Sommerfeld?
- Letteratura russa: Nosich-Shestopalov, condizione di Reichardt.

Cosa si è fatto

Teorema di unicità.

Cosa stiamo facendo...

$u = \int Gf$ soddisfa la nostra condizione di radiazione.

Sommerfeld vs guide d'onda

Problemi

- n non è costante all'esterno di un compatto.
- Jäger & Saitō.
- Spettro puntuale \rightarrow condizione di radiazione di Sommerfeld?
- Letteratura russa: Nosich-Shestopalov, condizione di Reichardt.

Cosa si è fatto

Teorema di unicità.

Cosa stiamo facendo...

$u = \int Gf$ soddisfa la nostra condizione di radiazione.

$$\Delta u + k^2 n(x)^2 u = f, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{Helm})$$

Cose note

- Numero finito di $\lambda_m^j \in (0, d^2)$ soluzioni di
$$\sqrt{d^2 - \lambda} \phi_j(h, \lambda) + \phi_j'(h, \lambda) = 0.$$
- Posto $q = k^2 n_*^2 - k^2 n(x)^2$, $v_j(x, \lambda_m^j)$ verificano
$$v'' + [\lambda_m^j - q(x)]v = 0.$$
- $v(x, \lambda_m^j) e^{i\beta_m^j z}$ verifica l'equazione di Helmholtz omogenea, dove $\beta_m^j = \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda_m^j}$.

Remarks

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v_j(x, \lambda_m^j) = 0$ (esponenzialmente).
- $v_j(x, \lambda_m^j)$ ortogonale ad ogni altra $v_j(x, \lambda)$.

$$\Delta u + k^2 n(x)^2 u = f, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{Helm})$$

Cose note

- Numero finito di $\lambda_m^j \in (0, d^2)$ soluzioni di
$$\sqrt{d^2 - \lambda} \phi_j(h, \lambda) + \phi_j'(h, \lambda) = 0.$$
- Posto $q = k^2 n_*^2 - k^2 n(x)^2$, $v_j(x, \lambda_m^j)$ verificano
$$v'' + [\lambda_m^j - q(x)]v = 0.$$
- $v(x, \lambda_m^j) e^{i\beta_m^j z}$ verifica l'equazione di Helmholtz omogenea, dove $\beta_m^j = \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda_m^j}$.

Remarks

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v_j(x, \lambda_m^j) = 0$ (esponenzialmente).
- $v_j(x, \lambda_m^j)$ ortogonale ad ogni altra $v_j(x, \lambda)$.

Decomposizione di u

Proiezioni di u su $v_j(x, \lambda_m^j)$

$u_m^j(x, z)$ proiezione di u su $v_j(x, \lambda_m^j)$:

$$u_m^j(x, z) = e_j(x, \lambda_m^j) U^j(z, \lambda_m^j),$$

dove $U^j(z, \lambda_m^j) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, z) e_j(\xi, \lambda_m^j) d\xi$, $e_j(x, \lambda_m^j) = \frac{v_j(x, \lambda_m^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_m^j)\|_2}$.

Scriviamo u come somma di tutte le u_m^j più "tutto quello che avanza", che denotiamo con u_0 .

Decomposizione di u

$$u = u_0 + \sum_{j \in \{s, a\}} \sum_{m=1}^{M_j} u_m^j,$$

Decomposizione di u

Proiezioni di u su $v_j(x, \lambda_m^j)$

$u_m^j(x, z)$ proiezione di u su $v_j(x, \lambda_m^j)$:

$$u_m^j(x, z) = e_j(x, \lambda_m^j) U^j(z, \lambda_m^j),$$

dove $U^j(z, \lambda_m^j) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, z) e_j(\xi, \lambda_m^j) d\xi$, $e_j(x, \lambda_m^j) = \frac{v_j(x, \lambda_m^j)}{\|v_j(\cdot, \lambda_m^j)\|_2}$.

Scriviamo u come somma di tutte le u_m^j più "tutto quello che avanza", che denotiamo con u_0 .

Decomposizione di u

$$u = u_0 + \sum_{j \in \{s, a\}} \sum_{m=1}^{M_j} u_m^j,$$

Una condizione di radiazione per l'unicità

Teorema di unicità

Esiste al più una soluzione debole $u \in L^2(\mu)$ di (Helm) tale che

$$\int_0^\infty \int_{\partial\Omega_\rho^1} \left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - ikn_{cl}u_0 \right|^2 d\ell d\rho + \sum_{j \in \{s,a\}} \sum_{m=1}^{M_j} \int_0^\infty \int_{\partial\Omega_\rho^2} \left| \frac{\partial u_m^j}{\partial \nu} - i\beta_m^j u_m^j \right|^2 d\ell d\rho \leq C.$$

- Ω_ρ^1 e Ω_ρ^2 omotetici a Ω^1 e Ω^2 insiemi convessi (Lip.).
- ν normale esterna.
- $L^2(\mu) = \{u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^2} |u(x, z)|^2 \mu(x, z) dx dz < +\infty\}$,
dove $\mu = (1 + x^2 + z^2)^{-s}$, con $s > 1$.

Remarks

- Se i modi guidati non sono presenti, scegliendo $\Omega_\rho^1 = B_\rho$, (RC) è

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - ikn_{cl}u \right|^2 dx < +\infty,$$

già stata ottenuta da Rellich (con ipotesi differenti su n).

- Gli insiemi Ω_ρ^1 e Ω_ρ^2 possono essere differenti.
- Nel dimostrare che esiste una soluzione che verifica (RC) dobbiamo anche individuare gli insiemi Ω_ρ^1 e Ω_ρ^2 appropriati.

Remarks

- Se i modi guidati non sono presenti, scegliendo $\Omega_\rho^1 = B_\rho$, (RC) è

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - ikn_{cl}u \right|^2 dx < +\infty,$$

già stata ottenuta da Rellich (con ipotesi differenti su n).

- Gli insiemi Ω_ρ^1 e Ω_ρ^2 possono essere differenti.
- Nel dimostrare che esiste una soluzione che verifica (RC) dobbiamo anche individuare gli insiemi Ω_ρ^1 e Ω_ρ^2 appropriati.

Dimostrazione

Idee principali della dimostrazione

- $u_1, u_2 \in L^2(\mu)$ due soluzioni di (Helm), allora $w = u_1 - u_2 \in L^2(\mu)$ soluzione di

$$\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0; \quad (1)$$

- $\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0;$
- $w \in L^2(\mu) \Rightarrow$ stime sulla crescita di w e w_x per $|x| \rightarrow \infty$.
- w_0 e w_m^j soddisfano (1);
- (RC) implica $w_0, w_m^j \in L^2(\mathbb{R}^2)$; (e dunque $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$)
- $w \equiv 0$ è la sola soluzione dell'equazione di Helmholtz che appartiene a $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Dimostrazione

Idee principali della dimostrazione

- $u_1, u_2 \in L^2(\mu)$ due soluzioni di (Helm), allora $w = u_1 - u_2 \in L^2(\mu)$ soluzione di

$$\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0; \quad (1)$$

- $\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0;$
- $w \in L^2(\mu) \Rightarrow$ stime sulla crescita di w e w_x per $|x| \rightarrow \infty$.
- w_0 e w_m^j soddisfano (1);
- (RC) implica $w_0, w_m^j \in L^2(\mathbb{R}^2)$; (e dunque $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$)
- $w \equiv 0$ è la sola soluzione dell'equazione di Helmholtz che appartiene a $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Dimostrazione

Idee principali della dimostrazione

- $u_1, u_2 \in L^2(\mu)$ due soluzioni di (Helm), allora $w = u_1 - u_2 \in L^2(\mu)$ soluzione di

$$\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0; \quad (1)$$

- $\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0;$
- $w \in L^2(\mu) \Rightarrow$ stime sulla crescita di w e w_x per $|x| \rightarrow \infty$.
- w_0 e w_m^j soddisfano (1);
- (RC) implica $w_0, w_m^j \in L^2(\mathbb{R}^2)$; (e dunque $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$)
- $w \equiv 0$ è la sola soluzione dell'equazione di Helmholtz che appartiene a $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Alcuni dettagli della dimostrazione

Teorema

Se $w \in L^2(\mu)$ è una soluzione di $\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0$ che soddisfa (RC), allora $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

[Per semplicità, supponiamo che w sia sufficientemente regolare.]

- $\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0$: seconda formula di Green ci dice che

$$2\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} (w \Delta \bar{w} - \bar{w} \Delta w) dx = 0.$$

- w_0 e w_m^j soddisfano l'equazione di Helmholtz omogenea.
- $w_0, w_m^j \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_\rho} \left[\left| \frac{\partial w_m^j}{\partial \nu} \right|^2 + \beta_l^2 |w_m^j|^2 \right] d\sigma d\rho = \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_\rho} \left[\left| \frac{\partial w_m^j}{\partial \nu} - i\beta_l^2 w_m^j \right|^2 \right] d\sigma d\rho \leq C.$$

Alcuni dettagli della dimostrazione

Teorema

Se $w \in L^2(\mu)$ è una soluzione di $\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0$ che soddisfa (RC), allora $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

[Per semplicità, supponiamo che w sia sufficientemente regolare.]

- $\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0$: seconda formula di Green ci dice che

$$2\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} (w \Delta \bar{w} - \bar{w} \Delta w) dx = 0.$$

- w_0 e w_m^j soddisfano l'equazione di Helmholtz omogenea.
- $w_0, w_m^j \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_\rho} \left[\left| \frac{\partial w_m^j}{\partial \nu} \right|^2 + \beta_l^2 |w_m^j|^2 \right] d\sigma d\rho = \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_\rho} \left[\left| \frac{\partial w_m^j}{\partial \nu} - i\beta_l^2 w_m^j \right|^2 \right] d\sigma d\rho \leq C.$$

Alcuni dettagli della dimostrazione

Teorema

Se $w \in L^2(\mu)$ è una soluzione di $\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0$ che soddisfa (RC), allora $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

[Per semplicità, supponiamo che w sia sufficientemente regolare.]

- $\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0$: seconda formula di Green ci dice che

$$2\text{Im} \int_{\partial\Omega} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Omega} (w \Delta \bar{w} - \bar{w} \Delta w) dx = 0.$$

- w_0 e w_m^j soddisfano l'equazione di Helmholtz omogenea.
- $w_0, w_m^j \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_\rho} \left[\left| \frac{\partial w_m^j}{\partial \nu} \right|^2 + \beta_l^2 |w_m^j|^2 \right] d\sigma d\rho = \int_0^{+\infty} \int_{\partial\Omega_\rho} \left[\left| \frac{\partial w_m^j}{\partial \nu} - i\beta_l^2 w_m^j \right|^2 \right] d\sigma d\rho \leq C.$$

Alcuni dettagli della dimostrazione II.

Teorema

$w \equiv 0$ è la sola soluzione di $\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

- Risultati di regolarità globale $\Rightarrow w \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Assumiamo $w \not\equiv 0$.
 - Trasformiamo con Fourier nella variabile z :
 $\hat{w}_{xx}(x, t) + [k^2 n(x)^2 - t^2] \hat{w}(x, t) = 0. \quad \hat{w}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, z) e^{-izt} dz$
 - $\hat{w}(x, t) = a(t) \cos \sqrt{\lambda - d^2}(x - h) + b(t) \sin \sqrt{\lambda - d^2}(x - h)$,
a.e. $x > h$, con $\lambda = k^2 n_*^2 - t^2$.
 - Poiché $\|\hat{w}\|_2 = \|w\|_2 \leq C$, allora $\hat{w} \equiv 0$ per $\lambda > d^2$.
 - Se $0 < \lambda < d^2$ trasformiamo con Titchmarsh nella variabile x
 $w(x, z) = AZ_s(z) v_s(x, \lambda_s^m) + BZ_a(z) v_a(x, \lambda_a^m)$,
dove $Z_j(z) = e^{\pm \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda_j^m} z}$.
- $\Rightarrow w \notin L^2(\mathbb{R}^2)$, perché $w(x, \cdot) \notin L^2(\mathbb{R})$.

Alcuni dettagli della dimostrazione II.

Teorema

$w \equiv 0$ è la sola soluzione di $\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

- Risultati di regolarità globale $\Rightarrow w \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Assumiamo $w \not\equiv 0$.
 - Trasformiamo con Fourier nella variabile z :
 $\hat{w}_{xx}(x, t) + [k^2 n(x)^2 - t^2] \hat{w}(x, t) = 0. \quad \hat{w}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, z) e^{-izt} dz$
 - $\hat{w}(x, t) = a(t) \cos \sqrt{\lambda - d^2}(x - h) + b(t) \sin \sqrt{\lambda - d^2}(x - h)$,
a.e. $x > h$, con $\lambda = k^2 n_*^2 - t^2$.
 - Poiché $\|\hat{w}\|_2 = \|w\|_2 \leq C$, allora $\hat{w} \equiv 0$ per $\lambda > d^2$.
 - Se $0 < \lambda < d^2$ trasformiamo con Titchmarsh nella variabile x
 $w(x, z) = AZ_s(z) v_s(x, \lambda_s^m) + BZ_a(z) v_a(x, \lambda_a^m)$,
dove $Z_j(z) = e^{\pm \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda_j^m} z}$.
- $\Rightarrow w \notin L^2(\mathbb{R}^2)$, perché $w(x, \cdot) \notin L^2(\mathbb{R})$.

Alcuni dettagli della dimostrazione II.

Teorema

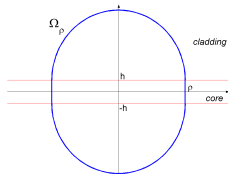
$w \equiv 0$ è la sola soluzione di $\Delta w + k^2 n(x)^2 w = 0$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

- Risultati di regolarità globale $\Rightarrow w \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Assumiamo $w \not\equiv 0$.
 - Trasformiamo con Fourier nella variabile z :
 $\hat{w}_{xx}(x, t) + [k^2 n(x)^2 - t^2] \hat{w}(x, t) = 0. \quad \hat{w}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, z) e^{-izt} dz$
 - $\hat{w}(x, t) = a(t) \cos \sqrt{\lambda - d^2}(x - h) + b(t) \sin \sqrt{\lambda - d^2}(x - h)$,
a.e. $x > h$, con $\lambda = k^2 n_*^2 - t^2$.
 - Poiché $\|\hat{w}\|_2 = \|w\|_2 \leq C$, allora $\hat{w} \equiv 0$ per $\lambda > d^2$.
 - Se $0 < \lambda < d^2$ trasformiamo con Titchmarsh nella variabile x
 $w(x, z) = AZ_s(z)v_s(x, \lambda_s^m) + BZ_a(z)v_a(x, \lambda_a^m)$,
dove $Z_j(z) = e^{\pm \sqrt{k^2 n_*^2 - \lambda_j^m} z}$.
- $\Rightarrow w \notin L^2(\mathbb{R}^2)$, perché $w(x, \cdot) \notin L^2(\mathbb{R})$.

$u = \int Gf$ verifica (RC)

Notazioni

- $[x]_h = \begin{cases} x - h, & x > h, \\ 0, & |x| \leq h, \\ x + h, & x < -h. \end{cases}$
- $\Omega_\rho = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : [x]_h^2 + z^2 = \rho^2\}$.
- Q_ρ quadrato di lato ρ .



Conggettura

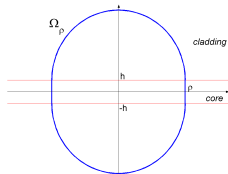
Poniamo $u = \int Gf$, con $\text{supp}(f)$ compatto. Allora $u \in L^2(\mu)$ e

$$\int_0^\infty \int_{\partial\Omega_\rho} \left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - ikn_{cl}u_0 \right|^2 d\ell d\rho + \sum_{j,m} \int_0^\infty \int_{\partial Q_\rho} \left| \frac{\partial u_m^j}{\partial \nu} - i\beta_m^j u_m^j \right|^2 d\ell d\rho < +\infty.$$

$u = \int Gf$ verifica (RC)

Notazioni

- $[x]_h = \begin{cases} x - h, & x > h, \\ 0, & |x| \leq h, \\ x + h, & x < -h. \end{cases}$
- $\Omega_\rho = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : [x]_h^2 + z^2 = \rho^2\}$.
- Q_ρ quadrato di lato ρ .



Congettura

Poniamo $u = \int Gf$, con $\text{supp}(f)$ compatto. Allora $u \in L^2(\mu)$ e

$$\int_0^\infty \int_{\partial\Omega_\rho} \left| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - i k n_{cl} u_0 \right|^2 d\ell d\rho + \sum_{j,m} \int_0^\infty \int_{\partial Q_\rho} \left| \frac{\partial u_m^j}{\partial \nu} - i \beta_m^j u_m^j \right|^2 d\ell d\rho < +\infty.$$

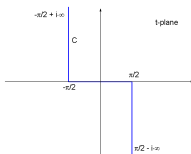
Osservazioni sulla dimostrazione

- Se $f \in L^2(\mu^{-1})$ allora $u \in L^2(\mu)$. [CIRAOLLO – MAGNANINI, 2006]
- **Verifica di (RC) sulla parte guidata.** Grazie alla ortogonalità delle $v_j(x, \lambda_m^j)$ abbiamo un'espressione 'semplice' di u_m^j . (RC) può essere data su quadrati o su Ω_ρ .
- u_0 corrisponde alla **parte non guidata** della soluzione, data da G^{rad} .

Abbiamo bisogno di una rappresentazione differente della funzione di Green e di accurate stime asintotiche della soluzione sull'insieme Ω_ρ .

Altra rappresentazione di G^{rad}

$$G^{rad} = \frac{1}{8\pi i} \sum_{j \in \{s, a\}} \int_C \left[A_j^+(x, \xi; t) e^{i\beta_0 \alpha_+(x, z; \xi, \zeta; t)} + A_j^-(x, \xi; t) e^{i\beta_0 \alpha_-(x, z; \xi, \zeta; t)} \right] dt$$



- $\Phi_j(x, \tau) = \phi_j(x - [x]_h, d^2 + \tau^2) + \frac{\phi_j'(x - [x]_h, d^2 + \tau^2)}{i\tau}$;
- $A_j^\pm(x, \xi; t) = \frac{\Phi_j(x, \beta_0 \sin t) \Phi_j(x, \pm \beta_0 \sin t)}{\Phi_j(h, \beta_0 \sin t) \Phi_j(x, -\beta_0 \sin t)}$;
- $\alpha_\pm(x, z; \xi, \zeta; t) = ([x]_h \pm [\xi]_h) \sin t + |z - \zeta| \cos t$.

GUIDE D'ONDA NON RETTILINEE

Guide d'onda non rettilinee. Piccole perturbazioni

Supponiamo che la guida non sia più rettilinea:

$$L_0 = \Delta + k^2 n_0^2(x), \quad L_\varepsilon = \Delta + k^2 n_\varepsilon^2(x, z).$$

- Dimostriamo l'**esistenza** di una soluzione per $L_\varepsilon u = f$ per ε sufficientemente piccolo.
- **Simulazioni.** Rappresentiamo u e L_ε in serie di Neumann:

$$u = u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots; \quad L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots$$

Schema

$$L_0 u_0 = f$$

$$L_0 u_1 = -L_1 u_0$$

...

$$L_0 u_j = - \sum_{r=0}^{j-1} L_{j-r} u_r$$

...

Simulazioni

- u_0 modo guidato.
- Calcoliamo u_1 .

Guide d'onda non rettilinee. Piccole perturbazioni

Supponiamo che la guida non sia più rettilinea:

$$L_0 = \Delta + k^2 n_0^2(x), \quad L_\varepsilon = \Delta + k^2 n_\varepsilon^2(x, z).$$

- Dimostriamo l'**esistenza** di una soluzione per $L_\varepsilon u = f$ per ε sufficientemente piccolo.
- **Simulazioni.** Rappresentiamo u e L_ε in serie di Neumann:

$$u = u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots; \quad L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots$$

Schema

$$L_0 u_0 = f$$

$$L_0 u_1 = -L_1 u_0$$

...

$$L_0 u_j = - \sum_{r=0}^{j-1} L_{j-r} u_r$$

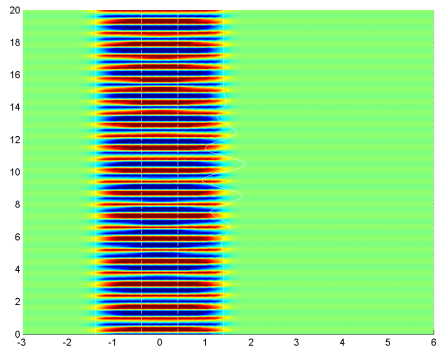
...

Simulazioni

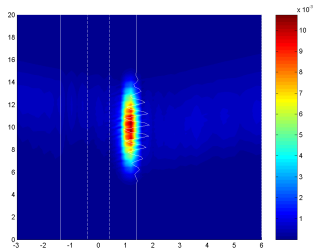
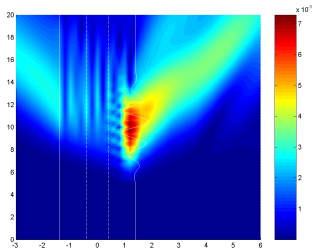
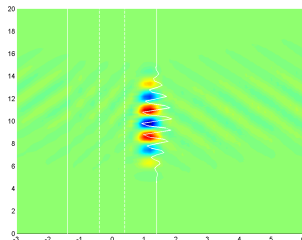
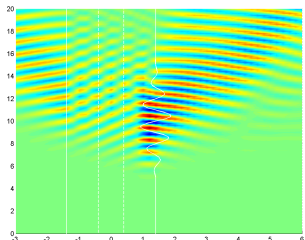
- u_0 modo guidato.
- Calcoliamo u_1 .

Near Field

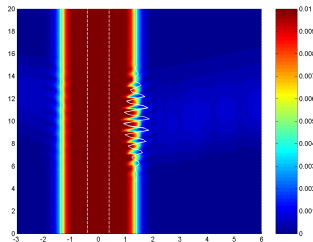
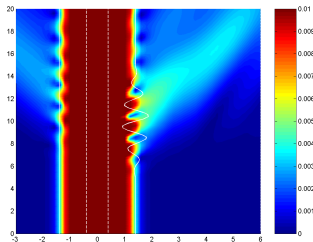
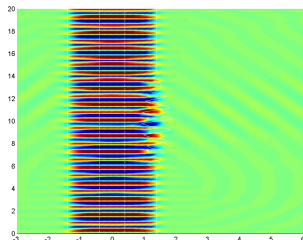
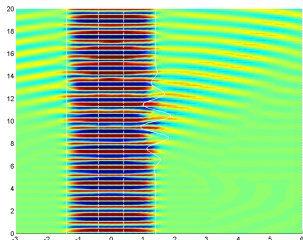
Parte reale di u_0 :



Near Field. Parte reale e modulo di u_1 .



Near Field. Parte reale e modulo di $u_0 + \varepsilon u_1$.



In futuro..

- Caso 3-D (unicità, piccole perturbazioni, ecc...).
- Unicità per le guide d'onda non rettilinee.
- Approssimazione del problema definito su \mathbb{R}^N attraverso un problema definito su un dominio limitato.