

Esercizi di Analisi Complessa

1. Dire se (e, in caso, dove) $f(z) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ è olomorfa.
2. Dimostrare che la funzione $f(z) = x^2 + x - y^2 + iy(2x + 1)$ è olomorfa in \mathbb{C} .
3. Sia $u(x, y) = -x^2 + y^2 - 3x$. Determinare, se esiste, una funzione $v(x, y)$ tale che la funzione $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ risulti olomorfa in \mathbb{C} .
4. Determinare il disco di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3^n + (-2i)^n)(z^2 - 2iz - 1)^n.$$

5. Determinare raggio di convergenza e somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}.$$

6. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{\gamma} |z| dz, \quad \int_{\gamma} ze^{z^2} dz,$$

dove γ è:

- (i) il segmento congiungente il punto $z_0 = -2i$ al punto $z_1 = 2$;
- (ii) i due archi, percorsi in senso antiorario, individuati da z_0 e z_1 sulla circonferenza centrata nell'origine e passante per z_0 e z_1 .

7. Calcolare

$$\int_{\{z \in \mathbb{C}: |z|=2\}} \frac{e^{iz} \sin z}{z^2} dz$$

utilizzando la formula integrale di Cauchy.

8. Calcolare il valore dell'integrale dell'esercizio precedente utilizzando il teorema dei residui.

9. Determinare le serie di Laurent (determinando tutte le potenze negative e fermandosi alle potenze positive di ordine 3) di

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z-3)}$$

nei punti $z = 2$, $z = 3$, $z = 0$ e determinarne l'insieme di convergenza.

10. Ripetere l'esercizio precedente scrivendo la serie di Laurent per intero.
11. Calcolare la serie di Laurent di

$$f(z) = (z^2 + 2)e^{\frac{2i}{z}}.$$

12. Classificare le singolarità di

$$f(z) = \frac{z-4}{(z^2+1)(z-i)(z^2-5z+1)}$$

e calcolare i corrispondenti residui.

13. Calcolare il residuo di $f(z) = z^2 \sin \frac{3}{z}$.
14. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\{z \in \mathbb{C}: |z|=3\}} \frac{\sin z}{z^2(z^2+2)(z+4i)} dz.$$

15. Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^4+4}.$$

16. Calcolare (facendo il minor numero di conti possibile!)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x - \sin x}{2 + \cos x} dx.$$

17. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = (x^4 + 1)^{-1}$.
18. Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x+x^3} dx.$$