

LIMITI

1. Definizione di limite.

Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R} ; se il numero reale x_0 è di accumulazione per A in ogni intorno di x_0 si trovano elementi di A distinti da x_0 . Allora ha senso chiedersi come variano i valori di una funzione definita in A quando i valori della x si scelgono vicini ad x_0 o come diremo quando x tende a x_0 .

DEFINIZIONE 1. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f ammette il numero reale l come limite per x che tende a x_0 se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $I(x_0)$ tale che si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \cap I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Per indicare che l è il limite della f quando x tende a x_0 usiamo la notazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Si noti che se la f è definita in x_0 , cioè $x_0 \in A$, non si ha necessariamente (cfr. figure 1 e 2)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

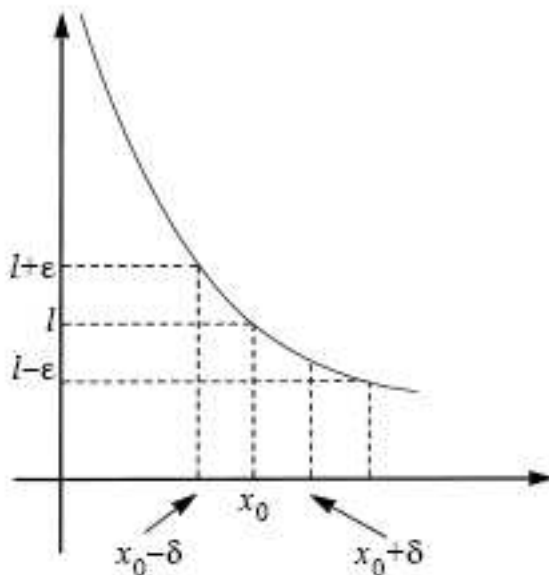


Fig. 1

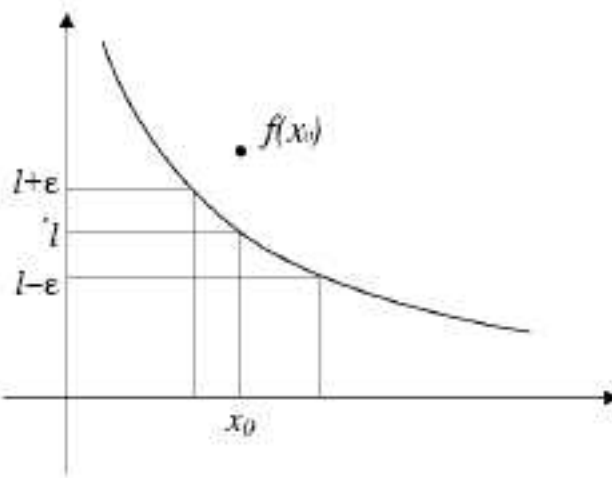


Fig. 2

Ciò è conseguenza del fatto che il valore $f(x_0)$ non interviene nella def.1, ove si richiede che la condizione $|f(x) - l| < \varepsilon$ sia soddisfatta per ogni x di A opportunamente vicino a x_0 , ma diverso da x_0 .

DEFINIZIONE 2. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f tende a $+\infty$ quando x tende a x_0 se, per ogni $k \in \mathbb{R}_+$, esiste $I(x_0)$ tale che $f(x) > k$ per ogni $x \in A \cap I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Per denotare che la f tende a $+\infty$ quando x tende a x_0 usiamo la notazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

DEFINIZIONE 3. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R} , $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f tende a $-\infty$ quando x tende a x_0 se, per ogni $k \in \mathbb{R}_+$, esiste $I(x_0)$ tale che $f(x) < -k$ per ogni $x \in A \cap I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Per denotare che la f tende a $-\infty$ quando x tende a x_0 usiamo la notazione

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Nelle figure 3 e 4 abbiamo rispettivamente il grafico di una funzione avente nel punto x_0 limite uguale a $+\infty$, $-\infty$.

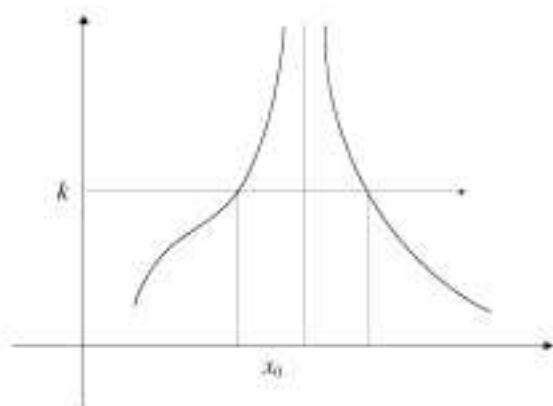


Fig. 3

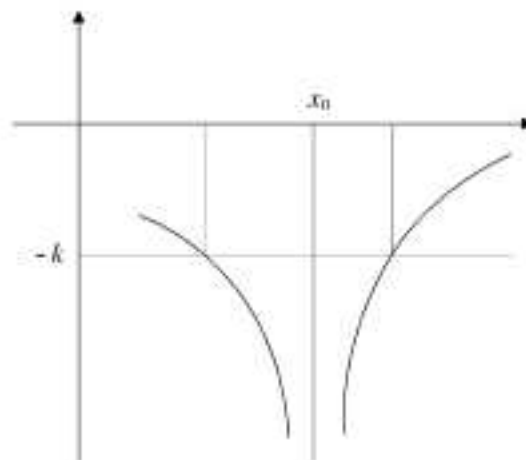


Fig. 4

Esempio 1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x + 1$, verificare che $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.

Esempio 2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x^2$, verificare che $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = +\infty$.

Esempio 3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log x^2$, verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x^2 = -\infty.$$

Supponiamo, ora, che A sia un sottoinsieme di \mathbb{R} non limitato superiormente, allora comunque si sceglie un numero reale h possiamo trovare un elemento x di A maggiore di h . Quindi ha senso porsi il problema di determinare come variano i valori di una funzione f definita su A al crescere di x o come diremo quando x tende a $+\infty$.

DEFINIZIONE 4. Sia A un sottoinsieme non limitato superiormente di \mathbb{R} e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f ammette il numero reale l come limite per x che tende a $+\infty$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $I(+\infty)$ tale che si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in I(+\infty) \cap A$.

Per denotare che la f tende a l quando x tende a $+\infty$ usiamo la notazione

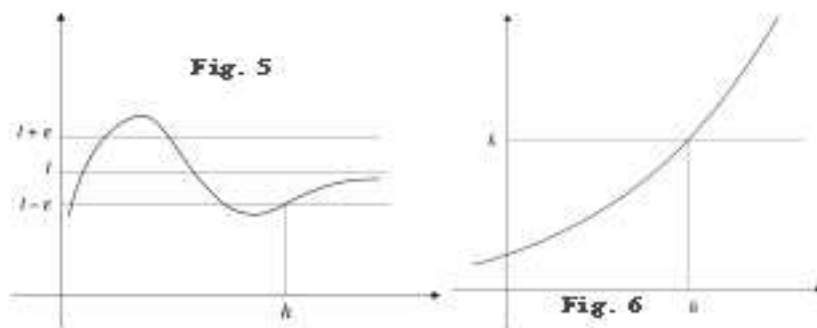
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

DEFINIZIONE 5. Sia A un sottoinsieme non limitato superiormente di \mathbb{R} e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f ammette $+\infty$ (risp. $-\infty$) come limite per x che tende a $+\infty$ se, per ogni $k \in \mathbb{R}_+$, esiste $I(+\infty)$ tale che si abbia $f(x) > k$ (risp. $f(x) < -k$) per ogni $x \in I(+\infty) \cap A$.

Per esprimere ciò usiamo la notazione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Nelle figure 5 e 6 è riportato il grafico di una funzione che per $x \rightarrow +\infty$ ammette per limite rispettivamente $l \in \mathbb{R}$ e $+\infty$.



Esempio 4. Data la funzione $f :] - 1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x + 2)/(x + 1)$, verificare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x + 1} = 1.$$

Esempio 5. Sia $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x + 1}$, verificare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} = +\infty$.

Esempio 6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x - x^2$, verificare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) = -\infty$.

Se il sottoinsieme A di \mathbb{R} è non limitato inferiormente, allora comunque si sceglie un numero reale h esiste sempre $x \in A$ minore di h , per cui ha senso chiedersi come variano i valori di una funzione f definita in A al decrescere di x o come diremo quando x tende a $-\infty$.

DEFINIZIONE 6. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R} non limitato inferiormente e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f ammette il numero reale l come limite per x che tende a $-\infty$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $I(-\infty)$ tale che si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \cap I(-\infty)$.

Per denotare che la f tende a l quando x tende a $-\infty$ usiamo la notazione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

DEFINIZIONE 7. Sia A un sottoinsieme non limitato inferiormente di \mathbb{R} e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione f ammette $+\infty$ (risp. $-\infty$) come limite per x che tende a $-\infty$ se, per ogni $k \in \mathbb{R}_+$, esiste $I(-\infty)$ tale che si abbia $f(x) > k$ (risp. $f(x) < -k$) per ogni $x \in A \cap I(-\infty)$. Per esprimere ciò usiamo la notazione

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Esempio 7. Sia $f :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$, verificare che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Esempio 8. Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$, verificare che $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Esempio 9. Sia $f :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -\sqrt{|x|}$, verificare che $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{|x|} = -\infty$.

La proposizione che segue permette in alcuni casi di stabilire che una funzione non ammette limite in un punto.

PROPOSIZIONE 1. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R} , x_0 un punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non è limitato superiormente, inferiormente e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $I(x_0)$ tale che si abbia $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $x, y \in I(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})$.

Esempio 10. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x/|x|$, non ammette limite in $x = 0$.

2. Teoremi sulle funzioni dotate di limite.

A sottoinsieme di \mathbb{R} , x_0 punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non limitato superiormente, inferiormente e $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$.

TEOREMA 1. Se la funzione f ammette limite quando x tende a x_0 , questo è unico.

Il teorema che segue è noto come teorema della permanenza del segno.

TEOREMA 2. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ con $l \in \mathbb{R}$, allora esiste un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che $f(x)$ e l sono entrambi maggiori di zero o entrambi minori di zero per ogni $x \in I(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})$.

COROLLARIO 1. Se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$ e se la funzione f ammette il numero reale l come limite quando x tende a x_0 allora $l \geq 0$.

I due teoremi che seguono sono noti come teoremi di confronto.

TEOREMA 3. Se le funzioni f, g, h sono tali che $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$ e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R},$$

allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$.

TEOREMA 4. Se le funzioni f e g sono tali che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$.

3. Teoremi per il calcolo dei limiti.

A sottoinsieme di \mathbb{R} , x_0 punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non limitato superiormente, inferiormente e $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$.

TEOREMA 5. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$.

Il teorema che segue dà indicazioni sul limite della somma di due funzioni.

TEOREMA 6. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ con $l, m \in \mathbb{R}$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$.

Si noti che il teor.6 assicura che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - l] = 0$.

TEOREMA 7. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$ con $l, m \in \mathbb{R}$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = lm$.

TEOREMA 8. Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = l/m.$$

4. Limite da destra. Limite da sinistra.

A intervallo aperto e f una funzione definita in A . Se $x_0 \in A$, allora x_0 è un punto di accumulazione di A sia da sinistra sia da destra.

DEFINIZIONE 8. La funzione f ammette il numero reale l come limite quando x tende a x_0 da sinistra e si scrive $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $I_-(x_0)$ tale che si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \cap I_-(x_0)$.

DEFINIZIONE 9. La funzione f ammette $+\infty$ (risp. $-\infty$) come limite quando x tende a x_0 da sinistra e si scrive $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ (risp. $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$) se in corrispondenza ad ogni $k \in \mathbb{R}_+$ esiste $I_-(x_0)$ tale che si abbia $f(x) > k$ (risp. $f(x) < -k$) per ogni $x \in A \cap I_-(x_0)$.

DEFINIZIONE 10. La funzione f ammette il numero reale l come limite quando x tende a x_0 da destra e si scrive $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ se, in

corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ esiste $I_+(x_0)$ tale che si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \cap I_+(x_0)$.

DEFINIZIONE 11. La funzione f ammette $+\infty$ (risp. $-\infty$) come limite quando x tende a x_0 da destra e si scrive $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ (risp. $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$) se, in corrispondenza ad ogni $k \in \mathbb{R}_+$ esiste $I_+(x_0)$ tale che si abbia $f(x) > k$ (risp. $f(x) < -k$) per ogni $x \in A \cap I_+(x_0)$.

Il teorema che segue dà una condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f ammetta limite in un punto x_0 di accumulazione sia da sinistra sia da destra per l'insieme A .

TEOREMA 9. La funzione f ammette limite quando x tende a x_0 se e solo se esistono $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ e coincidono.

Esempio 11. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ per $x \leq 0$ e $f(x) = x + 1$ per $x > 0$, non ammette limite in $x = 0$.

Esempio 12. Data la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$, provare che $f(0-) = -\infty$ e $f(0+) = +\infty$.

6. Limiti notevoli.

Riportiamo, senza verifica, alcuni limiti notevoli utili per il calcolo dei limiti.

i) Siano $A \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non è limitato superiormente, inferiormente e $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

In particolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

ii) Siano $A \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non è limitato superiormente, inferiormente e $f : A \rightarrow]-\infty, -1[$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

In particolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

iii) Siano $A \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non è limitato superiormente, inferiormente e $f : A \rightarrow]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, allora esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{1/f(x)} = e.$$

In particolare $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

iv) Siano $A \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non è limitato superiormente, inferiormente e $f : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, allora per ogni $a \in \mathbb{R}_+$ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = lga.$$

In particolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = lga$.

v) Siano $A \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione di A o uno dei due simboli $+\infty$, $-\infty$ se A non è limitato superiormente, inferiormente e $f : A \rightarrow]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1 + f(x))^\alpha - 1}{f(x)} = \alpha.$$

In particolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.