Polinomi di Chebyshev e approssimazione di funzioni

Polinomi Ortogonali.
Definizione. Sia $\omega(x)$ una funzione peso sull'intervallo $[a,b]$ tale che:

$$\omega(x) \geq 0 \quad e \quad \int_a^b \omega(x)dx < +\infty.$$

Indichiamo con $\{\varphi_k,\ k = 0, 1, ...\}$ una famiglia di polinomi algebrici con

$$grado(\varphi_k) = k.$$

Diremo che $\{\varphi_k,\ k = 0, 1, ...\}$ è una famiglia di polinomi ortogonali rispetto al peso $\omega(x)$ sull'intervallo $[a,b]$ se risulta:

$$\int_a^b \omega(x)\varphi_n\varphi_m dx = 0 \ \ \forall\ m, n \ \ \text{con } m \neq n.$$

Sussiste il seguente risultato:

Teorema. Se $\{\varphi_k,\ k = 0, 1, ...\}$ è una famiglia di polinomi ortogonali rispetto al peso $\omega(x)$ su $[a,b]$, allora il polinomio φ_k ha k radici reali e distinte appartenenti all'intervallo aperto $]a,b[$.

I **Polinomi di Chebyshev** sono una famiglia di polinomi ortogonali sull'intervallo $]-1,1[$ rispetto al peso

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il generico polinomio di questa famiglia è definito dall'espressione:

$$T_k(x) = cos(k\theta) \ \ \text{con } \theta = arccos(x) \text{ e } \ k \geq 0.$$

Inoltre, tenendo presente che $T_0(x) = 1$ e che $T_1(x) = x$, è possibile ottenere i polinomi di Chebyshev di grado k utilizzando la seguente formula ricorsiva:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$

Gli zeri del polinomio $T_k(x)$, sull'intervallo $[-1,1]$, hanno la seguente espressione:

$$x_i = cos(\frac{(2i-1)\pi}{2k}) \text{ con } \ i = 1, ..., k$$

ovvero

$$x_i = cos(\frac{(2i+1)\pi}{2(k\ )}) \text{ con } \ i = 0, ..., k-1.$$

Proprietà di ortogonalità:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \quad \text{se } m \neq k$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi \quad \text{se } k = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } k > 0$$

Approssimazione di funzioni.

Sussiste il seguente risultato per l'interpolazione di una funzione sul generico intervallo $[a, b]$:

Sia $f : [a, b] \to \Re$ con $f \in C^1[a, b]$ e si utilizzino come nodi di interpolazione gli $(n+1)$ zeri del polinomio di Chebyshev di grado $(n+1)$. Sotto queste ipotesi si dimostra la convergenza del polinomio interpolatore $P_n(x)$ alla funzione $f(x)$ per $x \in [a, b]$ quando $n \to \infty$.

Nel caso in cui $[a, b] \neq [-1, 1]$, gli zeri del polinomio di Chebyshev, definiti in $[-1, 1]$, prima di essere usati come base di interpolazione, devono subire il seguente mapping in $[a, b]$:

$$x_i^* = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_i.$$